JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 14-20.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__14_0>

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La question de trouver une expression simple du nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2)$$

des représentations d'un entier donné n par la forme

$$x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2,$$

c'est-à-dire du nombre des solutions que l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2$$

comporte en y prenant pour x, y, z, t des entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs, offre des difficultés qu'il m'a été jusqu'ici impossible de lever complétement d'une manière satisfaisante. Mais les difficultés dont il s'agit ne portent que sur le cas d'un entier n de la forme

$$6l + 1.$$

Les solutions que j'ai obtenues pour tous les autres cas ne laissent, je crois, rien à désirer. C'est à les exposer que je veux consacrer le présent article. Pour abréger, je représenterai par

$$A(n)$$

le nombre demandé

$$N(n = x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2).$$

Qu'il soit donc bien entendu que dans ce qui va suivre

$$A(n)$$

désigne le nombre des représentations de n par la forme toujours sous-entendue

$$x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2.$$

2. Pour distinguer clairement les divers cas qui peuvent se présenter, je mettrai en évidence les facteurs 2 et 3, quand ils existent, et j'écrirai

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant un entier impair premier à 3 et les exposants α, β pouvant se réduire à zéro.

Le premier cas sera celui d'un entier pair et multiple de 3. La valeur de

$$\mathrm{A}(2^\alpha 3^\beta m)$$

s'obtiendra alors en multipliant la somme

$$\zeta_1(m)$$

des diviseurs de m par le facteur

$$12(3^{\beta-1} - 1)\zeta_1(m)$$

qui dépend de β.

En d'autres termes, sous la double condition de

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

l'on a

$$(1) \qquad \mathrm{A}(2^\alpha 3^\beta m) = 12(3^{\beta-1} - 1)\zeta_1(m).$$

Quand on a $\beta = 1$, cette formule donne

$$\mathrm{A}(3.2^\alpha m) = 0,$$

résultat exact, car l'équation

$$3.2^\alpha m = x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2$$

exige que 3 divise x^2+y^2, partant x et y, en sorte que le second membre serait divisible par 9, tandis que le premier ne l'est pas.

Quand β est >1, l'équation

$$2^\alpha 3^\beta m = x^2+y^2+9z^2+9t^2$$

est ramenée par le raisonnement précédent à celle-ci

$$2^\alpha 3^{\beta-2} m = x^2+y^2+z^2+t^2.$$

Aussi l'équation (1) n'est-elle qu'une conséquence immédiate du théorème de Jacobi concernant le nombre des représentations d'un entier pair par une somme de quatre carrés.

De même s'il s'agit d'un entier impair, multiple de 3, en sorte que β soit >0, on aura

$$\text{(2)} \qquad A(3^\beta m) = 4(3^{\beta-1}-1)\zeta_1(m).$$

Cette fois encore le second membre est nul pour $\beta=1$.

5. Le cas d'un entier

$$2^\alpha m,$$

pair et premier à 3, sans être bien difficile à traiter, demande pourtant un peu plus d'artifice que ceux où il s'agit d'un multiple de 3; le résultat est, du reste, tout aussi simple.

L'exposant α n'étant pas nul, la valeur de

$$A(2^\alpha m)$$

s'exprime en effet par le quadruple de la somme des diviseurs de m; c'est-à-dire que, pour $\alpha>0$, l'on a

$$\text{(3)} \qquad A(2^\alpha m) = 4\zeta_1(m).$$

Par exemple, on doit avoir

$$A(2) = 4,$$

résultat confirmé par l'identité

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 9 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0^2$$

qui donne quatre représentations de l'entier 2 sous la forme

$$x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2.$$

On aura également

$$A(4) = 4;$$

la vérification se tire des deux identités

$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 9 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0^2$$

et

$$4 = 0^2 + (\pm 2)^2 + 9 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0^2.$$

Il faut aussi que

$$A(10) = 24.$$

Or on a les identités

$$\begin{aligned}
10 &= (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 9 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0^2,\\
10 &= (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + 9 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0^2,\\
10 &= (\pm 1)^2 + 0^2 + 9(\pm 1)^2 + 9 \cdot 0^2,\\
10 &= 0^2 + (\pm 1)^2 + 9(\pm 1)^2 + 9 \cdot 0^2,\\
10 &= (\pm 1)^2 + 0^2 + 9 \cdot 0^2 + 9(\pm 1)^2,\\
10 &= 0^2 + (\pm 1)^2 + 9 \cdot 0^2 + 9(\pm 1)^2,
\end{aligned}$$

qui sont au nombre de six et fournissent chacune quatre représentations. Comme

$$4 \cdot 6 = 24,$$

la vérification cherchée a lieu.

Enfin on doit avoir

$$A(14) = 32;$$

or cela résulte des identités

$$14 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 9(\pm 1)^2 + 9.0^2,$$
$$14 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 9(\pm 1)^2 + 9.0^2,$$
$$14 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 9.0^2 + 9(\pm 1)^2,$$
$$14 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 9.0^2 + 9(\pm 1)^2.$$

Je ne pousserai pas plus loin ces exemples.

4. Reste le cas d'un entier m, impair et premier à 3. Il se subdivise en deux autres, suivant que l'on a

$$m = 6l + 1,$$

ou

$$m = 6l - 1.$$

J'ai déjà dit que je n'ai rien obtenu d'entièrement satisfaisant au sujet de

$$A(6l + 1);$$

mais j'ai réussi pour

$$A(6l - 1)$$

dont la valeur est fournie par les quatre tiers de la somme des diviseurs de $6l - 1$, en sorte que

$$(4) \qquad A(6l - 1) = \frac{4}{3}\zeta_1(6l - 1).$$

Vérifions cette formule sur quelques exemples. Et d'abord soit $l = 1$, d'où

$$6l - 1 = 5.$$

Elle donnera

$$A(5) = 8,$$

résultat confirmé par les identités

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 9.0^2 + 9.0^2$$

et

$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 9 . 0^2 + 9 . 0^2,$$

dont chacune fournit quatre représentations de l'entier 5.

Soit ensuite $l = 2$, d'où

$$6l - 1 = 11.$$

La formule (4) donne

$$A(11) = 16,$$

ce qui s'accorde avec les identités

$$11 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 9(\pm 1)^2 + 9 . 0^2$$

et

$$11 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 9 . 0^2 + 9(\pm 1)^2,$$

dont chacune fournit huit représentations.

Soit enfin $l = 3$, d'où

$$6l - 1 = 17.$$

La formule (4) donnera

$$A(17) = 24.$$

Les identités à employer cette fois sont au nombre de quatre, savoir :

$$17 = (\pm 1)^2 + (\pm 4)^2 + 9 . 0^2 + 9 . 0^2,$$
$$17 = (\pm 4)^2 + (\pm 1)^2 + 9 . 0^2 + 9 . 0^2,$$
$$17 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 9(\pm 1)^2 + 9 . 0^2,$$
$$17 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 9 . 0^2 + 9(\pm 1)^2.$$

Elles fournissent respectivement, pour l'entier 17, quatre, quatre, huit et encore huit représentations. Or

$$4 + 4 + 8 + 8 = 24.$$

La formule (4) reste donc exacte.

On verra, dans l'article suivant, qu'en désignant par

$$B(n)$$

le nombre des représentations d'un entier donné n par la forme

$$2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 5t^2,$$

on a

$$A(6l+1) + 2B(6l+1) = 4\zeta_1(6l+1);$$

mais n'ayant pas la valeur de

$$B(6l+1),$$

on ne peut pas en conclure celle de

$$A(6l+1).$$