JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 145-150.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__145_0>

SUR LA FORME
$x^2+y^2+2z^2+2t^2+4u^2+4v^2$;

Par M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande une expression simple du nombre

$$N(n=x^2+y^2+2z^2+2t^2+4u^2+4v^2)$$

des représentations de n par la forme à six variables

$$x^2+y^2+2z^2+2t^2+4u^2+4v^2,$$

c'est-à-dire du nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$n=x^2+y^2+2z^2+2t^2+4u^2+4v^2,$$

où l'on prend pour x, y, z, t, u, v des entiers indifféremment pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs.

Pour répondre à cette question, nous poserons

$$n=2^\alpha m,$$

m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro; puis nous introduirons la fonction

$$\rho_2(m)$$

définie comme exprimant la somme

$$\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2$$

qui porte sur les diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m=d\delta$. Plus tard, nous aurons à considérer d'autres fonctions numériques; mais, dans la plupart des cas, on n'a besoin que de la fonction $\rho_2(m)$.

2. Qu'il s'agisse d'abord d'un nombre pair, ou du cas de $\alpha > 0$. On prouve sans peine que la valeur de

$$\mathrm{N}(2^{\alpha} m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$

est alors égale à celle de

$$\mathrm{N}(2^{\alpha-1} m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2v^2)$$

qui est connue d'après un article inséré au cahier d'août 1864. Nous sommes ainsi conduits à deux formules distinctes, l'une propre au cas de $\alpha = 1$, l'autre au cas de $\alpha > 1$.

Quand on suppose $\alpha = 1$, c'est-à-dire quand on s'occupe d'un entier impairement pair, il vient

$$\mathrm{N}(2m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 8\rho_2(m).$$

Par exemple, on doit avoir

$$\mathrm{N}(2 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 8.$$

Or, des identités

$$\begin{aligned}
2 &= (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,\\
2 &= 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,\\
2 &= 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,
\end{aligned}$$

on conclut qu'en effet l'entier 2 est susceptible de huit représentations sous la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2.$$

L'équation

$$\mathrm{N}(6 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 64,$$

qui s'offre ensuite, est vérifiée à son tour par les identités

$$\begin{aligned}
6 &= (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,\\
6 &= (\pm 2)^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,\\
6 &= (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,\\
6 &= 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2.
\end{aligned}$$

La première de ces identités fournit immédiatement seize représentations de l'entier 6, et chacune des trois autres en donne aussi seize, lorsqu'on y opère les permutations convenables. Or

$$16 + 3.16 = 64.$$

Mais quand il s'agit d'un entier pairement pair, c'est-à-dire du cas de

$$\alpha > 1,$$

l'on a

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4\left[2^{2\alpha-1} - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_2(m).$$

Par exemple

$$N(4 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 28,$$

résultat exact, comme le prouvent les identités

$$\begin{aligned}
4 &= (\pm 2)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,\\
4 &= (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,\\
4 &= 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,\\
4 &= 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,
\end{aligned}$$

dont les trois premières comportent des permutations auxquelles il faut avoir égard. D'autres identités serviraient de même à constater l'exactitude de l'équation

$$N(12 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 288$$

que notre formule fournit. Je me dispense de les écrire.

3. Passons au cas d'un entier impair m, en sorte qu'il s'agisse de la valeur de

$$N(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2).$$

On verra facilement que cette valeur est double de celle de

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2),$$

que nous avons donnée dans le cahier de mars.

D'après cela, si

$$m$$

est de la forme

$$4g+3,$$

on aura

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 2\rho_2(m).$$

Par exemple,

$$\mathrm{N}(3 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 16,$$

résultat confirmé par les identités

$$\begin{aligned}
3 &= (\pm 1)^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,\\
3 &= 0^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,\\
3 &= (\pm 1)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,\\
3 &= 0^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,
\end{aligned}$$

dont chacune fournit quatre représentations de l'entier 3 par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2.$$

La formule

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 2\rho_2(m)$$

reste même exacte pour un entier m de la forme $4g+1$, lorsque cet entier n'est susceptible d'aucune décomposition en une somme de deux carrés. Par exemple, ayant

$$\rho_2(21) = 384,$$

on en conclura que

$$\mathrm{N}(21 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 768.$$

Mais en général il faut poser autant de fois qu'on le peut l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

l'entier i étant positif, tandis que s est indifféremment positif, nul ou négatif, compter le nombre

$$\rho(m)$$

des décompositions de m ainsi obtenues, et calculer la somme

$$\sum i^2.$$

Cela fait, on aura

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 2\rho_2(m) + 4\sum i^2 - 2m\rho(m).$$

Les deux derniers termes du second membre disparaissent d'eux-mêmes quand l'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

est impossible et l'on retombe alors sur l'équation donnée plus haut.

Pour $m = 1$, il existe une seule décomposition, savoir

$$1 = 1^2 + 4.0^2.$$

On a donc alors

$$\rho(m) = 1$$

et

$$\sum i^2 = 1.$$

D'ailleurs

$$\rho_2(1) = 1.$$

La formule

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 2\rho_2(m) + 4\sum i^2 - 2m\rho(m)$$

exige donc que

$$\mathrm{N}(1 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4.$$

Ce résultat est confirmé par les deux identités

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2$$

et

$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2.$$

Pour

$$m = 5,$$

on a deux décompositions exprimées par les équations

$$5 = 1^2 + 4.1^2$$

et

$$5 = 1^2 + 4(-1)^2,$$

en sorte qu'il vient cette fois

$$\rho(m) = 2$$

et

$$\sum i^2 = 2.$$

D'ailleurs

$$\rho_2(5) = 26.$$

Notre formule donne en conséquence

$$\mathrm{N}(5 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 40.$$

Or les identités

$$\begin{aligned} 5 &= (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2, \\ 5 &= (\pm 1)^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2, \\ 5 &= (\pm 1)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 \end{aligned}$$

fournissent effectivement quarante représentations de l'entier 5, lorsqu'on y opère les permutations convenables.

Pour

$$m = 9,$$

on aurait

$$\rho(m) = 1,$$

puis

$$\sum i^2 = 9$$

et

$$\rho_2(m) = 73,$$

partant

$$\mathrm{N}(9 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 164;$$

mais je ne m'arrêterai pas à vérifier ce résultat.