JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; dix-septième article

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 135-144.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__135_0>

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

DIX-SEPTIÈME ARTICLE.

1. La formule qui est l'objet de ce dix-septième article a quelque importance à mes yeux. Elle jouera un rôle utile dans l'ensemble de mon travail.

Soit

$$m$$

un nombre impair donné,

$$d$$

un quelconque des diviseurs de m (dont 1 et m font toujours partie) et

$$\delta$$

le diviseur conjugué, en sorte que

$$m = d\delta.$$

Étendons d'ailleurs cette notation aux autres entiers impairs, comme

$$m', m''$$

ou

$$m_1, m_2,$$

que nous aurons plus tard à considérer, c'est-à-dire posons de même de toutes les manières possibles

$$m' = d'\delta', \quad m'' = d''\delta'',$$

ou bien

$$m_1 = d_1\delta_1, \quad m_2 = d_2\delta_2,$$

$d', \delta', d'', \delta'', d_1, \delta_1, d_2, \delta_2$ étant toujours des entiers positifs.

2. Cela compris, je regarde l'entier impairement pair $2m$ comme décomposé de toutes les manières possibles en une somme de deux entiers positifs impairs m', m''. Pour avoir ainsi

$$2m = m' + m'',$$

on n'aura qu'à faire successivement

$$m' = 1, \quad m' = 3, \ldots, \quad m' = 2m - 1;$$

les valeurs correspondantes de m'' seront

$$m'' = 2m - 1, \quad m'' = 2m - 3, \ldots, \quad m'' = 1.$$

Mettant ensuite m' et m'' sous la forme de produits d'après ce qu'on a expliqué plus haut, on aura l'équation

$$2m = d'\delta' + d''\delta'',$$

qui est une de celles dont nous voulons nous occuper dans cet article.

En introduisant une fonction

$$\psi(x, y)$$

de deux variables, nous tirerons de l'équation

$$2m = d'\delta' + d''\delta''$$

la somme triple que voici :

$$\sum \left[\sum \sum (-1)^{\frac{\delta'-1}{2} + \frac{d''-1}{2}} \psi(d' - d'', \delta' + \delta'') \right].$$

Les deux premières sommations portent sur les valeurs de d', δ' et d'', δ'' relatives à chaque groupe m', m''; la dernière concerne le total fait, pour l'ensemble des groupes, des sommes partielles ainsi obtenues.

Au reste, on pourra n'écrire qu'un seul signe

$$\sum;$$

il n'y aura aucune difficulté à se représenter ce que nous entendrons par

$$\sum (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}+\frac{d''-1}{2}} \psi(d'-d'', \delta'+\delta''),$$

et la notation restera suffisamment expressive en devenant beaucoup plus simple.

Jusqu'ici la fonction

$$\psi(x, y)$$

qui figure sous le signe sommatoire est entièrement arbitraire. Plus tard nous l'assujettirons à quelques conditions qui seront indiquées en temps utile.

3. Il faut maintenant se représenter le nombre m comme formé de deux parties entières et positives, l'une impaire, l'autre paire, c'est-à-dire écrire de toutes les manières possibles

$$m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2,$$

m_1 et m_2 étant des entiers impairs et positifs; les valeurs successives de m_1 seront

$$1,\ 3,\ 5, \ldots,\ m-4,\ m-2;$$

celles de m_2 en résulteront par notre équation même qui donne

$$2^{\alpha_2} m_2 = m - m_1,$$

l'exposant α_2 variant d'un cas à l'autre. En mettant m_1 et m_2 sous la forme de produits, nous aurons ensuite l'équation

$$m = d_1 \delta_1 + 2^{\alpha_2} d_2 \delta_2,$$

et nous pourrons considérer la somme nouvelle

$$\sum (-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}+\frac{\delta_2-1}{2}} \psi(2d_1, 2^{\alpha_2+1} d_2)$$

qui se rapporte au mode de partition que cette équation indique. Bien qu'il s'agisse ici encore d'une somme triple, nous n'employons qu'un seul

$$\sum,$$

persuadés que cela ne nuira pas à la clarté. On se souviendra que la sommation porte sur l'ensemble des valeurs de

$$d_1,\ \delta_1,\ 2^{\alpha_2} d_2,\ \delta_2$$

qui sont compatibles avec la nature de ces quantités elles-mêmes et avec l'équation

$$m = d_1 \delta_1 + 2^{\alpha_2} d_2 \delta_2.$$

Au reste la somme triple écrite explicitement serait

$$\sum \left[\sum\sum (-1)^{\frac{\delta_1 - 1}{2} + \frac{\delta_2 - 1}{2}} \psi(2d_1,\ 2^{\alpha_2+1} d_2) \right],$$

les deux premiers

$$\sum$$

portant sur les valeurs de

$$d_1,\ \delta_1,\ 2^{\alpha_2} d_2,\ \delta_2$$

relatives à chaque groupe

$$m_1,\ 2^{\alpha_2} m_2,$$

et le troisième sur le total, pour l'ensemble des groupes, des sommes partielles ainsi obtenues.

4. Il faut maintenant rapprocher entre elles la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta' - 1}{2} + \frac{d'' - 1}{2}} \psi(d' - d'',\ \delta' + \delta'')$$

du n° **2**, que nous désignerons par

$$S',$$

et la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta_1 - 1}{2} + \frac{\delta_2 - 1}{2}} \psi(2d_1, 2^{\alpha_2+1} d_2)$$

du n° **3**, que nous désignerons par

$$S_1.$$

Ce rapprochement s'opérera au moyen d'une certaine somme simple

$$S,$$

relative à l'équation

$$m = d\delta,$$

et que nous définirons en disant que

$$S = \sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} \psi(0, 2d).$$

Mais pour arriver au but, nous devrons imposer quelques restrictions à l'absolue généralité de la fonction

$$\psi(x, y).$$

Désormais donc, nous exigerons que la fonction $\psi(x, y)$ soit à la fois symétrique et paire en x, y, c'est-à-dire nous exigerons que l'on ait d'une part

$$\psi(x, y) = \psi(y, x)$$

et d'autre part

$$\psi(-x, y) = \psi(x, y), \quad \psi(x, -y) = \psi(x, y).$$

On pourra, si l'on veut, poser

$$\psi(x, y) = f(x, y) + f(y, x);$$

la condition de symétrie sera remplie d'elle-même, et il suffira que

$$f(x, y)$$

soit une fonction paire.

Pour toute fonction

$$\psi(x, y)$$

du genre indiqué, que cette fonction soit d'ailleurs algébrique ou numérique, on aura

$$S' = S + 4S_1,$$

ou bien, explicitement,

$$\sum (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}+\frac{d''-1}{2}} \psi(d'-d'', \delta'+\delta'')$$

$$= \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \psi(0, 2d) + 4 \sum (-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}+\frac{\delta_2-1}{2}} \psi(2d_1, 2^{\alpha_2+1} d_2),$$

formule remarquable qu'on joindra, pour les compléter, à celles de nos premiers articles.

5. Nous appliquerons cette formule à quelques exemples. Et d'abord sans particulariser davantage la fonction $\psi(x, y)$, nous ferons successivement $m = 1$, puis $m = 3$.

Pour

$$m = 1,$$

l'équation

$$m = d_1 \delta_1 + 2^{\alpha_2} d_2 \delta_2$$

est impossible; la somme

$$S_1$$

relative à ce mode de partition est donc nulle. Quant aux équations

$$m = d\delta$$

et

$$2m = d'\delta' + d''\delta'',$$

elles n'ont évidemment lieu qu'en prenant l'unité pour valeur commune de

$$d, \delta, d', \delta', d'', \delta''.$$

De là

$$S = \psi(0, 2)$$

et

$$S' = \psi(0, 2).$$

L'équation

$$S' = S + 4S_1$$

est donc exacte.

Pour $m = 3$, l'équation

$$m = d\delta$$

donne $d = 3$, $\delta = 1$, ou bien $d = 1$, $\delta = 3$; par conséquent

$$S = \psi(0, 6) - \psi(0, 2).$$

L'équation

$$m = d_1\delta_1 + 2^{\alpha_2}d_2\delta_2$$

n'a lieu qu'avec

$$d_1 = 1, \quad \delta_1 = 1, \quad 2^{\alpha_2}d_2 = 2, \quad \delta_2 = 1,$$

en sorte que

$$S_1 = \psi(2, 4).$$

Quant à l'équation

$$2m = d'\delta' + d''\delta'',$$

elle comporte huit systèmes de solutions compris dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{llll}
d' = 1, & \delta' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 5, \\
d' = 1, & \delta' = 1, & d'' = 5, & \delta'' = 1, \\
d' = 1, & \delta' = 3, & d'' = 1, & \delta'' = 3, \\
d' = 1, & \delta' = 3, & d'' = 3, & \delta'' = 1, \\
d' = 3, & \delta' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 3, \\
d' = 3, & \delta' = 1, & d'' = 3, & \delta'' = 1, \\
d' = 1, & \delta' = 5, & d'' = 1, & \delta'' = 1, \\
d' = 5, & \delta' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 1.
\end{array}$$

La somme

$$S'$$

est donc composée de huit termes, savoir

$$\begin{aligned}&\psi(0, 6)+\psi(-4, 2)-\psi(0, 6)+\psi(-2, 4)\\&+\psi(2, 4)-\psi(0, 2)+\psi(0, 6)+\psi(4, 2).\end{aligned}$$

Il y a trois termes dont la valeur absolue est $\psi(0, 6)$, qu'on prend deux fois positivement et une fois négativement; groupez-les avec le terme négatif où figure $\psi(0, 2)$: le total sera

$$\psi(0, 6)-\psi(0, 2),$$

c'est-à-dire précisément S. Quant aux autres termes

$$\psi(-4, 2),\quad \psi(-2, 4),\quad \psi(2, 4),\quad \psi(4, 2),$$

ils sont égaux entre eux et à $\psi(2, 4)$, c'est-à-dire à S_1, d'après la nature de la fonction $\psi(x, y)$, qui est à la fois symétrique et paire. On a donc bien

$$S'=S+4S_1.$$

6. Les conditions imposées à la fonction

$$\psi(x, y)$$

seront remplies si l'on suppose constamment

$$\psi(x, y)=1.$$

Alors notre formule générale deviendra

$$\sum(-1)^{\frac{\delta'-1}{2}+\frac{d''-1}{2}}=\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}+4\sum(-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}+\frac{\delta_2-1}{2}},$$

ou bien, en introduisant une notation qui nous est familière,

$$\sum\rho(m')\rho(m'')=\rho(m)+4\sum\rho(m_1)\rho(m_2).$$

On se souvient qu'un entier impair m étant mis de toutes les manières possibles sous la forme

$$m = d\delta,$$

nous faisons

$$\rho(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

et que m', m'', m_1, m_2 sont aussi des entiers impairs liés à m par les deux équations

$$2m = m' + m'', \quad m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2.$$

C'est à ces équations que se rapportent les sommes indiquées dans la formule

$$\sum \rho(m')\rho(m'') = \rho(m) + 4\sum \rho(m_1)\rho(m_2),$$

laquelle peut du reste être obtenue de plus d'une manière. Mais ici nous la déduisons immédiatement d'une formule très-étendue dont la démonstration élémentaire et directe est facile, circonstance dont nous pourrons ailleurs tirer parti.

7. On remplirait aussi les conditions imposées à la fonction

$$\psi(x, y)$$

en prenant

$$\psi(x, y) = x^2 + y^2,$$

ou plus généralement

$$\psi(x, y) = x^{2\mu} + y^{2\mu},$$

l'entier μ étant quelconque.

On pourrait prendre également

$$\psi(x, y) = x^2 y^2,$$

ou encore

$$\psi(x, y) = x^{2\mu} y^{2\mu}.$$

Rien n'empêcherait d'introduire des fonctions trigonométriques, de faire par exemple, en désignant par t une constante arbitraire,

$$\psi(x, y) = \cos(xt)\cos(yt),$$

ou bien

$$\psi(x, y) = \cos(xt) + \cos(yt),$$

et ainsi de suite.

On peut obtenir de cette façon une infinité de formules particulières dont chacune aura sa valeur propre. Mais l'étude approfondie de tous ces détails doit être renvoyée à une autre circonstance. Nous n'avions pour objet, dans cet article, que de poser la formule

$$\sum (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}+\frac{d''-1}{2}} \psi(d'-d'', \delta'+\delta'')$$

$$= \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \psi(0, 2d) + 4\sum (-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}+\frac{\delta_2-1}{2}} \psi\left(2d_1, 2^{\alpha_2+1} d_2\right),$$

d'expliquer nettement la nature des éléments dont elle dépend, de faire sentir enfin qu'elle pourra être souvent utile. A cet égard, nous avons, je crois, dit tout ce qu'il fallait. Insistons cependant sur ce point que pourvu que la fonction

$$\psi(x, y)$$

satisfasse aux conditions que nous lui avons imposées pour tous les systèmes de valeurs de x, y qui peuvent s'offrir dans notre formule, cette fonction sera du reste quelconque, soit algébrique, soit purement numérique. C'est une remarque applicable à toutes nos *formules générales*, mais que je ne crains pas de répéter parce qu'elle est vraiment fondamentale et parce qu'elle indique avec précision le caractère singulier de ces formules.