JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 89-104.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__89_0>

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande une expression simple du nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2)$$

des représentations de n par la forme à six variables

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2,$$

c'est-à-dire du nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2,$$

où x, y, z, t, u, v sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Pour répondre à cette question, il convient de mettre en évidence les facteurs 2 et 3, quand ils entrent dans la composition de n. Nous poserons donc

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

les exposants α, β pouvant se réduire à zéro, et m désignant un entier impair, premier à 3, par conséquent un entier de l'une ou de l'autre des deux formes linéaires

$$6k + 1, \quad 6k - 1.$$

Nous aurons à nous servir du symbole

$$\left(\frac{m}{3}\right)$$

de Legendre. On sait que

$$\left(\frac{m}{3}\right) = 1$$

quand

$$m = 6k + 1,$$

et qu'au contraire

$$\left(\frac{m}{3}\right) = -1$$

quand

$$m = 6k - 1.$$

La valeur de

$$\left(\frac{m}{3}\right)$$

influe sur celle du nombre demandé

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2\right),$$

et les exposants α, β jouent aussi un rôle dans la question. Mais on a surtout à considérer une certaine fonction numérique de m, proportionnellement à laquelle

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2\right)$$

varie pour le système infini des entiers $2^\alpha 3^\beta m$ qui répondent à des valeurs données de α, β et de m (mod. 6). Si l'on décompose

$$m$$

de toutes les manières possibles en un produit

$$d\delta$$

de deux facteurs conjugués, la fonction numérique dont je parle s'exprimera par

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

Il est donc bon d'entrer dans quelques détails sur cette fonction numérique importante.

2. Quand m est de la forme $6k+1$, on a

$$\left(\frac{\delta}{3}\right)=\left(\frac{d}{3}\right),$$

d'où

$$\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2=\sum\left(\frac{d}{3}\right)d^2.$$

La fonction numérique

$$\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2$$

exprime donc alors l'excès de la somme des carrés des diviseurs de m qui sont $\equiv 1 \pmod{6}$ sur celle des carrés des diviseurs de m qui sont au contraire $\equiv -1 \pmod{6}$.

L'inverse a lieu quand m est de la forme $6k-1$, ce qui donne

$$\left(\frac{\delta}{3}\right)=-\left(\frac{d}{3}\right),$$

d'où

$$\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2=-\sum\left(\frac{d}{3}\right)d^2.$$

Dans ce dernier cas, notre fonction représente l'excès de la somme des carrés des diviseurs de m qui sont $\equiv -1 \pmod{6}$ sur celle des carrés des diviseurs de m qui sont $\equiv 1 \pmod{6}$.

La fonction

$$\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2$$

est égale à l'unité quand $m=1$. Quand $m=a^\mu b^\nu \ldots$, a, b, etc., désignant des nombres premiers distincts, la somme qu'elle désigne peut être remplacée par un produit dont les facteurs dépendent respectivement de a, b, etc., et que, d'après une notation souvent employée, nous pouvons écrire ainsi :

$$\prod\left[a^{2\mu}+\left(\frac{a}{3}\right)a^{2\mu-2}+a^{2\mu-4}+\left(\frac{a}{3}\right)a^{2\mu-6}+\ldots\right].$$

On voit, par cette expression en produit, que la fonction

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

est du genre de celles que nous disons *décomposables en facteurs*. On voit aussi qu'elle a toujours une valeur positive; et c'est pour cela que nous la préférons à la fonction

$$\sum \left(\frac{d}{3}\right) d^2$$

qui lui est numériquement égale, mais dont la valeur est tantôt positive, tantôt négative.

Je ferai encore observer qu'en donnant au symbole de Legendre la signification plus étendue que lui attribue Jacobi, on a

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2 = \sum \left(\frac{-3}{\delta}\right) d^2.$$

Cette remarque nous servira plus tard à mettre en évidence certaines analogies dont nous ne voulons pas nous occuper ici.

Pour $m = 5, 7, 11, 13$, etc., la fonction

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

prend les valeurs suivantes : 24, 50, 120, 170, etc.

3. Maintenant revenons à l'expression cherchée de

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2\right),$$

et, pour plus de clarté, passons graduellement du cas le plus simple au cas général. Simplifions d'ailleurs l'écriture en mettant

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha 3^\beta m\right)$$

au lieu de

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2\right).$$

Cette notation abrégée ne pourra tromper personne. En l'employant dans cet article et dans les articles suivants, nous ne l'appliquerons à la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2$$

qu'en ayant soin chaque fois de rappeler le sens que nous y attachons. On n'a donc aucune confusion à craindre.

Cela étant, soit d'abord $\alpha = 0$, $\beta = 0$, c'est-à-dire occupons-nous de la valeur de

$$\mathrm{N}(m),$$

m désignant un entier impair et premier à 3. J'obtiens pour ce cas la formule ci-après

$$\mathrm{N}(m) = \left[9 + \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2. \tag{1}$$

En d'autres termes, on a

$$\mathrm{N}(m) = 10 \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

quand

$$m = 6k + 1;$$

mais

$$\mathrm{N}(m) = 8 \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

quand

$$m = 6k - 1.$$

Ainsi, pour $m = 1$, on doit avoir

$$\mathrm{N}(1) = 10;$$

et cela est confirmé par l'identité

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 3.0^2,$$

où l'on peut mettre $(\pm 1)^2$ à cinq places différentes.

En passant au nombre 5, on trouve

$$\mathrm{N}(5) = 8.24 = 192.$$

Or les identités

$$5 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3.0^2,$$
$$5 = 2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 3.0^2,$$
$$5 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 3.1^2,$$

en affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables, fournissent en effet cent quatre-vingt-douze représentations de l'entier 5 par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2,$$

la première identité donnant trente-deux représentations et chacune des deux autres en donnant quatre-vingts.

En continuant, on obtiendrait

$$N(7) = 10.50 = 500,$$

puis

$$N(11) = 8.120 = 960,$$

et ainsi de suite. Mais je n'insiste pas sur ces applications numériques.

4. Pour les entiers impairs multiples de 3, la valeur de

$$N(3^\beta m)$$

n'est guère moins simple. Je trouve, en effet, que

$$N(3^\beta m) = \left[9^{\beta+1} + \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2. \tag{2}$$

La formule (2) reste exacte pour $\beta = 0$. Elle se réduit alors à la formule (1), qu'elle peut par conséquent remplacer, tout en ayant plus d'étendue.

Lorsqu'on veut distinguer les deux cas de $m \equiv 1 \pmod{6}$ et de $m \equiv -1 \pmod{6}$, la formule (2) se décompose ainsi qu'il suit : on a

$$N(3^\beta m) = (9^{\beta+1} + 1) \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

quand

$$m = 6k + 1;$$

mais

$$N(3^\beta m) = (9^{\beta+1} - 1) \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

quand

$$m = 6k - 1.$$

En prenant $m = 1$, $\beta = 1$, cela donne

$$N(3) = 82,$$

résultat confirmé par les deux identités

$$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 3.0^2$$

et

$$3 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 3.1^2,$$

qui fournissent quatre-vingt-deux représentations de l'entier 3 par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2,$$

si l'on a soin d'affecter du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et d'opérer les permutations convenables. On s'assurera de même que

$$N(9) = 9^3 + 1 = 730, \quad N(15) = 80.24 = 1920, \quad \text{etc.},$$

conformément à la formule (2). Je ne m'arrêterai pas à développer ces exemples.

5. La formule

$$N(3^\beta m) = \left[9^{\beta+1} + \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2 \tag{2}$$

peut être établie directement pour une valeur quelconque de β; mais on peut aussi démontrer d'abord la formule

$$N(m) = \left[9 + \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2 \tag{1}$$

puis en tirer l'équation (2) en prouvant que

$$(3)\qquad N(3^\beta m) = \frac{9^{\beta+1} + \left(\frac{m}{3}\right)}{9 + \left(\frac{m}{3}\right)} N(m).$$

Ajoutons que l'équation (3) peut être rendue plus générale; car elle s'étend aux nombres pairs. En d'autres termes, q désignant un nombre premier à 3, mais d'ailleurs pair ou impair, on a de même

$$(4)\qquad N(3^\beta q) = \frac{9^{\beta+1} + \left(\frac{q}{3}\right)}{9 + \left(\frac{q}{3}\right)} N(q).$$

L'équation (4) nous débarrasse des difficultés provenant du facteur 3; et si nous avions trouvé pour tout entier $2^\alpha m$, pair et premier à 3, la valeur de

$$N(2^\alpha m),$$

nous en conclurions sans peine celle de

$$N(2^\alpha 3^\beta m).$$

La question à laquelle cet article est surtout consacré, et qui déjà est résolue pour les entiers impairs, le serait donc aussi pour les entiers pairs.

6. Occupons-nous donc des entiers pairs, premiers à 3, et commençons par l'entier impairement pair $2m$. J'obtiens à ce sujet la formule suivante :

$$(5)\qquad N(2m) = 5\left[9 - \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

Ainsi, par exemple,

$$N(2) = 40;$$

ce qu'on vérifiera au moyen de l'identité

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 3.0^2,$$

en y effectuant les permutations convenables.

De là encore

$$N(10) = 50.24 = 1200.$$

Ici on a les identités

$$10 = 1^2 + 3^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 3.0^2,$$
$$10 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 + 3.0^2,$$
$$10 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + 3.1^2.$$

On y donnera le double signe $\pm$ aux racines des carrés qui ne sont pas nuls et on y opérera les permutations convenables. La première identité fournira ainsi quatre-vingts représentations de l'entier 10 par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2;$$

la seconde en fournira quatre cent quatre-vingts et la troisième six cent quarante. Or

$$80 + 480 + 640 = 1200.$$

L'équation

$$N(10) = 1200$$

est donc exacte.

En combinant la formule (5) et la formule (4), dans laquelle on prendra $q = 2m$, nous obtiendrons la valeur de

$$N(2.3^\beta m).$$

Il faudra se souvenir que

$$\left(\frac{2m}{3}\right) = -\left(\frac{m}{3}\right),$$

et alors on trouvera

$$(6) \qquad N(2.3^\beta m) = 5\left[9^{\beta+1} - \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

Par exemple,

$$N(6) = 400,$$

ce qu'on vérifiera sans peine au moyen des identités

$$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 3.0^2$$

et

$$6 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 3.1^2;$$

la première fournit deux cent quarante représentations, la seconde en fournit cent soixante.

7. Relativement aux entiers pairement pairs, premiers ou non à 3, voici les résultats qu'on obtient. Ces entiers peuvent être représentés par

$$2^{2\gamma+2}3^\beta m,$$

ou par

$$2^{2\gamma+3}3^\beta m,$$

suivant que 2 y entre avec un exposant pair, ou avec un exposant impair. Or je trouve, d'une part,

$$(7) \qquad N(2^{2\gamma+2}3^\beta m) = \frac{1}{5}(4^{2\gamma+3} - 9)\, N(3^\beta m),$$

et, d'autre part,

$$(8) \qquad N(2^{2\gamma+3}3^\beta m) = \frac{1}{25}(4^{2\gamma+4} + 9)\, N(2.3^\beta m).$$

En portant dans l'équation (7) la valeur de

$$N(3^\beta m)$$

fournie par l'équation (2), on a donc

$$(9) \qquad N(2^{2\gamma+2}3^\beta m) = \frac{1}{5}\left[9^{\beta+1} + \left(\frac{m}{3}\right)\right](4^{2\gamma+3} - 9)\sum\left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

Portant ensuite dans la formule (8) la valeur de

$$N(2.3^\beta m)$$

fournie par l'équation (6), on a semblablement

$$(10)\quad \mathrm{N}\,(2^{2\gamma+3}3^{\beta}m)=\frac{1}{5}\left[9^{\beta+1}-\left(\frac{m}{3}\right)\right](4^{2\gamma+4}+9)\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2.$$

Et ces formules (9), (10) peuvent se résumer dans la formule unique

$$(11)\quad \mathrm{N}\,(2^{\alpha}3^{\beta}m)=\frac{1}{5}\left[9^{\beta+1}+(-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[4^{\alpha+1}-(-1)^{\alpha}.9\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2,$$

sur laquelle nous allons présenter quelques remarques.

La formule (11) a été établie à l'occasion des nombres pairement pairs; il semblerait donc qu'on dût nécessairement y supposer $\alpha>1$. Cependant elle est vraie aussi pour $\alpha=1$; car elle coïncide alors avec la formule (6). Ainsi elle comprend la formule (6) qu'on peut dorénavant mettre de côté. Mais on ne peut pas y faire $\alpha=0$; le cas de $\alpha=0$ est résolu séparément par la formule (2). Les formules (2) et (11) (dans chacune desquelles on peut faire $\beta=0$) répondent donc, l'une aux entiers impairs, l'autre aux entiers pairs, et partant, à elles deux, suffisent à tout.

Au reste, il serait facile de les comprendre en une seule et même équation; car le résultat que donne la formule (11), quand on y suppose $\alpha=0$, n'est inexact que par le signe. Or on a

$$(-1)^{2^{\alpha}}=1$$

pour $\alpha>0$, et

$$(-1)^{2^{\alpha}}=-1$$

pour $\alpha=0$. En substituant à la formule (11) celle-ci :

$$(12)\quad \mathrm{N}\,(2^{\alpha}3^{\beta}m)=\frac{1}{5}(-1)^{2^{\alpha}}\left[9^{\beta+1}+(-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[4^{\alpha+1}-(-1)^{\alpha}.9\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2,$$

on aura donc une formule unique, applicable à tous les cas possibles.

Je me bornerai à un seul exemple, celui du nombre 4. La formule (12) donne

$$\mathrm{N}\,(4)=2\,(4^3-9)=110.$$

Or les identités

$$4 = 2^2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 3 . 0^2,$$
$$4 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0 + 3 . 0^2,$$
$$4 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 3 . 1^2,$$

où l'on doit opérer les permutations convenables, et affecter du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls, fournissent effectivement cent dix représentations de l'entier 4 par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2;$$

la première en fournit dix, la seconde quatre-vingts, la troisième vingt.

8. Jusqu'ici nous n'avons cherché que le nombre total

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m)$$

des solutions propres ou impropres de l'équation

$$2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2.$$

On peut désirer aussi d'avoir séparément le nombre

$$\mathrm{M}(2^\alpha 3^\beta m)$$

des solutions propres, c'est-à-dire des solutions exprimées par des valeurs de x, y, z, t, u, v, non divisibles à la fois par un facteur commun > 1. Alors, au lieu de la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

il faut introduire le produit

$$\prod \left[a^{2\mu} + \left(\frac{a}{3}\right) a^{2\mu-2}\right],$$

relatif aux facteurs premiers de l'entier

$$m = a^\mu b^\nu, \ldots;$$

puis poser

$$M(2^\alpha 3^\beta m) = C(\alpha, \beta, m) \prod \left[a^{2\mu} + \left(\frac{a}{3}\right) a^{2\mu-2}\right],$$

où

$$C(\alpha, \beta, m)$$

est une fonction de α, de β et de m (mod. 6) dont nous allons donner l'expression en distinguant les cas divers de $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha > 2$.

Pour $\alpha = 0$, on a

$$C(0, 0, m) = 9 + \left(\frac{m}{3}\right),$$

puis

$$C(0, 1, m) = 81 + \left(\frac{m}{3}\right),$$

et enfin, quand β est > 1,

$$C(0, \beta, m) = 80 \cdot 9^{\beta-1}.$$

Pour $\alpha = 1$, on a

$$C(1, 0, m) = 5\left[9 - \left(\frac{m}{3}\right)\right],$$

puis

$$C(1, 1, m) = 5\left[81 - \left(\frac{m}{3}\right)\right],$$

et enfin, quand β est > 1,

$$C(1, \beta, m) = 400 \cdot 9^{\beta-1}.$$

Pour $\alpha = 2$, on a

$$C(2, 0, m) = 10\left[9 + \left(\frac{m}{3}\right)\right],$$

puis

$$C(2, 1, m) = 10\left[81 + \left(\frac{m}{3}\right)\right],$$

et enfin, quand β est > 1,

$$C(2, \beta, m) = 800 \cdot 9^{\beta-1}.$$

Pour $\alpha > 2$, on a

$$C(\alpha, 0, m) = 15.4^{\alpha-1}\left[9 + (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{3}\right)\right],$$

puis

$$C(\alpha, 1, m) = 15.4^{\alpha-1}\left[81 + (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{3}\right)\right],$$

et enfin, quand β est > 1,

$$C(\alpha, \beta, m) = 75 \, . \, 4^{\alpha+1} \, . \, 9^{\beta-1}.$$

9. Cherchons encore le nombre

$$\mathfrak{N}(2^{\alpha}3^{\beta}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2)$$

des solutions dont l'équation

$$2^{\alpha}3^{\beta}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2$$

jouit quand on n'y admet pour x, y, z, t, u, v que des valeurs entières et positives. Il est bien clair que l'on n'a de telles solutions que quand l'exposant α est au moins égal à 3. Soit donc $\alpha = \varepsilon + 3$. Il s'agit de donner une expression simple de

$$\mathfrak{N}(8 \, . \, 2^{\varepsilon}3^{\beta}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2)$$

ou, pour abréger, de

$$\mathfrak{N}(8 \, . \, 2^{\varepsilon}3^{\beta}m).$$

Or, je trouve que

$$\mathfrak{N}(8 \, . \, 2^{\varepsilon}3^{\beta}m)$$

s'exprime par

$$2^{2\varepsilon-3}(9^{\beta+1} \pm 1)\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2,$$

le signe supérieur devant être employé quand $2^{\varepsilon}m$ n'est pas résidu quadratique de 3, tandis que quand $2^{\varepsilon}m$ est résidu on doit prendre le signe inférieur.

En d'autres termes, on a

$$(13) \qquad \mathfrak{N}(8 \cdot 2^\varepsilon 3^\beta m) = 2^{2\varepsilon-3}\left[9^{\beta+1} - (-1)^\varepsilon \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

Cette équation résout la question proposée. On peut y faire $\varepsilon = 0$, et aussi $\beta = 0$.

L'équation (13) donne

$$\mathfrak{N}(8) = 1,$$

résultat confirmé par l'équation

$$8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3 \cdot 1^2.$$

Elle donne aussi

$$\mathfrak{N}(16) = 5;$$

ce qui s'accorde avec les identités

$$16 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3 \cdot 1^2,$$
$$16 = 1^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3 \cdot 1^2,$$
$$16 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 3 \cdot 1^2,$$
$$16 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2 + 3 \cdot 1^2,$$
$$16 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3 \cdot 1^2.$$

J'en tire encore

$$\mathfrak{N}(24) = 10;$$

or on vérifiera aisément l'exactitude de ce dernier résultat au moyen de l'identité

$$24 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + 3 \cdot 1^2,$$

en y effectuant les permutations qu'elle comporte.

10. Si, tout en continuant à ne prendre pour valeurs de x, y, z, t, u, v que des entiers impairs et positifs, on imposait en outre à ces entiers la condition de n'être pas tous divisibles par un même facteur > 1, le nombre

$$\mathfrak{N}(8 \cdot 2^\varepsilon 3^\beta m)$$

des solutions que l'équation

$$8 \cdot 2^{\varepsilon} 3^{\beta} m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2$$

conserverait dans ces conditions nouvelles pourrait devenir inférieur à

$$\mathfrak{N}(8 \cdot 2^{\varepsilon} 3^{\beta} m),$$

et voici comment on le déterminerait.

Introduisons de nouveau le produit

$$\prod \left[a^{2\mu} + \left(\frac{a}{3}\right) a^{2\mu-2}\right],$$

relatif aux facteurs premiers de l'entier $m = a^{\mu} b^{\nu}, \ldots$, et posons

$$\mathfrak{M}(8 \cdot 2^{\varepsilon} 3^{\beta} m) = \mathrm{D}(\varepsilon, \beta, m) \prod \left[a^{2\mu} + \left(\frac{a}{3}\right) a^{2\mu-2}\right].$$

Le facteur

$$\mathrm{D}(\varepsilon, \beta, m)$$

sera une fonction numérique très-simple de ε, de β et de m (mod. 6). On a

$$\mathrm{D}(\varepsilon, 0, m) = 2^{2\varepsilon-3}\left[9 - (-1)^{\varepsilon}\left(\frac{m}{3}\right)\right],$$

puis

$$\mathrm{D}(\varepsilon, 1, m) = 2^{2\varepsilon-3}\left[81 - (-1)^{\varepsilon}\left(\frac{m}{3}\right)\right];$$

enfin, pour $\beta > 1$,

$$\mathrm{D}(\varepsilon, \beta, m) = 5 \cdot 2^{2\varepsilon+1} \cdot 9^{\beta-1}.$$

Je me dispenserai d'ajouter des exemples.