JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Extension du théorème de Rolle aux racines imaginaires des équations

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 84-88.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__84_0>

EXTENSION DU THÉORÈME DE ROLLE

AUX RACINES IMAGINAIRES DES ÉQUATIONS;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Dans une de mes leçons au Collége de France, j'ai eu jadis occasion de montrer comment on peut étendre aux racines imaginaires des équations le théorème célèbre de Rolle concernant les racines réelles, à savoir qu'entre deux racines réelles d'une équation algébrique, il y a au moins une racine réelle de l'équation dérivée. Je vais profiter, pour dire ici quelques mots sur ce sujet, des pages qui restent libres dans cette feuille.

Considérons un polynôme donné

$$z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m$$

dont les coefficients $a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$ sont réels ou imaginaires, c'est-à-dire de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$. Désignons, pour abréger, ce polynôme par $f(z)$ et posons

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

puis

$$f(z) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1},$$

P et Q étant des polynômes réels en x, y. Nous pourrons regarder x et y comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan, et ainsi à chaque imaginaire $x + y\sqrt{-1}$ répondra un point M du plan : réciproquement, à chaque point M du plan répondra une imaginaire $x + y\sqrt{-1}$. Nous distinguerons surtout les points A, B, C,... pour lesquels on aura

$$f(z) = 0,$$

c'est-à-dire dont les coordonnées vérifieront à la fois les deux équations

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

et les points A′, B′, C′,... pour lesquels la dérivée

$$f'(z)$$

sera nulle : ces derniers points A′, B′, C′,... sont ceux dont les coordonnées satisfont en même temps aux deux équations

$$\frac{dP}{dx} = 0, \quad \frac{dQ}{dx} = 0.$$

Maintenant admettons que deux points A, B, pour chacun desquels on a $f(z) = 0$, puissent être joints dans le plan des x, y par une ligne non interrompue AMB sur laquelle on ait constamment

$$Q = 0,$$

la ligne dont il s'agit étant d'ailleurs droite ou courbe, ou même brisée et formée de parties offrant des angles. Je dis qu'en allant de A en B sur cette ligne AMB, on rencontrera entre les points extrêmes A, B au moins un point tel que A′, pour lequel on aura

$$f'(z) = 0.$$

En effet l'équation

$$Q = 0$$

donne d'abord, pour tous les points de la ligne AMB,

$$\frac{dQ}{dx}\,dx + \frac{dQ}{dy}\,dy = 0,$$

ou bien

(1) $$\frac{dQ}{dx}\,dx + \frac{dP}{dx}\,dy = 0,$$

attendu que

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{dP}{dx}.$$

Si donc, en un point M de la ligne AMB, cette ligne offre deux branches faisant un angle, et par conséquent deux tangentes, il faudra nécessairement qu'en ce point l'on ait à la fois

$$\frac{dP}{dx} = 0$$

et

$$\frac{dQ}{dx} = 0,$$

d'où

$$f'(z) = 0.$$

Sans cela, en effet, l'équation différentielle (1), dans laquelle les coefficients

$$\frac{dP}{dx}, \quad \frac{dQ}{dx}$$

n'ont jamais pour chaque point M qu'une valeur unique et finie, ne pourrait fournir qu'une seule tangente. Ainsi, dans le cas d'une ligne anguleuse, notre théorème est démontré tout de suite.

Supposons à présent que nulle part on ne trouve un angle, et que par conséquent, en désignant par ds la différentielle de l'arc AM, les rapports

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}$$

varient d'une manière continue quand l'arc s grandit par le mouvement de M vers B. Le polynôme P, qui est nul en A et en B, peut croître ou décroître quand on marche de A vers B; mais s'il a crû au commencement, il doit ensuite décroître, et, s'il a décrû, croître pour se retrouver au point B avec la même valeur qu'au point A. Il faut donc que la différentielle

$$\left(\frac{dP}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dP}{dy}\frac{dy}{ds}\right) ds$$

change quelque part de signe dans l'intervalle de A à B. Le facteur ds est essentiellement positif. C'est donc l'autre facteur qui doit changer de signe; et comme les fonctions

$$\frac{dP}{dx}, \quad \frac{dP}{dy}, \quad \frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}$$

sont continues, ce n'est qu'en s'évanouissant qu'il pourra le faire. Il y aura donc entre A et B, sur la ligne AMB, au moins un point M pour lequel on aura

$$\frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{dy}dy = 0,$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad \frac{dP}{dx}dx - \frac{dQ}{dx}dy = 0,$$

puisque les deux dérivées partielles

$$\frac{dP}{dy}, \quad \frac{dQ}{dx}$$

ont des valeurs égales et de signes contraires.

Or, des équations (1) et (2), qui ont lieu au point M toutes les deux, on tire sans peine, en élevant au carré et ajoutant,

$$\left[\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right](dx^2 + dy^2) = 0,$$

et comme $dx^2 + dy^2$ (ou ds^2) ne peut pas se réduire à zéro, il faut en conclure qu'au point M dont nous nous occupons on a à la fois

$$\frac{dP}{dx} = 0$$

et

$$\frac{dQ}{dx} = 0,$$

partant

$$f'(z) = 0,$$

en sorte que le point M n'est autre chose qu'un des points A', B', C',... définis plus haut. Le théorème énoncé ci-dessus est donc complétement démontré.

Le théorème de Rolle est un cas particulier du nôtre. Supposez, en effet, que les coefficients $a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$ soient réels. Alors le polynôme Q sera de la forme yR, R étant aussi un polynôme entier. Si donc on a deux racines réelles de $f(z)=0$, elles répondront à deux points A, B situés sur l'axe des x, axe sur lequel on a $y=0$, partant $Q=0$. Donc, entre A et B, sur l'axe des x, il y aura au moins un point A' pour lequel la dérivée $f'(z)$ sera égale à zéro. Autrement dit, entre deux racines réelles de $f(z)=0$, il y a au moins une racine réelle de $f'(z)=0$. C'est le théorème de Rolle.

Notre théorème (comme celui de Rolle) peut être étendu, sous des conditions faciles à comprendre d'après la démonstration qui précède, aux équations transcendantes.

Ajoutons que, sans même sortir du cercle des équations algébriques, on pourrait donner à l'énoncé une forme plus générale (en apparence du moins, car au fond c'est toujours le même théorème). Pour cela, faisons

$$\lambda P + \mu Q = U$$

et

$$\nu P + \rho Q = V,$$

λ, μ, ν, ρ désignant des constantes quelconques, pour lesquelles cependant on n'ait pas

$$\lambda\rho - \mu\nu = 0.$$

Soient b et c deux autres constantes quelconques. Si l'on peut joindre par une ligne non interrompue GLH, le long de laquelle on ait partout $U=b$, deux points G, H pour lesquels V prenne la même valeur c, je dis qu'il y aura entre G et H, sur la ligne GLH, au moins un point A', répondant à l'équation $f'(z)=0$.