JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 2\left(y^2 + z^2 + t^2 + u^2\right) + 4v^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 421-424.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__421_0>

SUR LA FORME

$$x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2;$$

Par M. J. LIOUVILLE.

1. Après ce que nous avons donné (dans le cahier d'août) au sujet des deux formes à six variables

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)$$

et

$$x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

c'est chose bien facile que de trouver une expression simple du nombre des représentations d'un entier donné n par la forme nouvelle

$$x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2,$$

c'est-à-dire du nombre

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2]$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2,$$

dans laquelle x, y, z, t, u, v sont des entiers indifféremment pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs.

Il est évident, en effet, que quand n est impair la valeur demandée de

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2]$$

est précisément la moitié de celle de

$$\mathrm{N}[n = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)],$$

et que quand n est au contraire un nombre pair $2g$ elle est égale à celle de

$$N[g = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)].$$

2. Pour déduire de là des formules explicites, nous poserons

$$n = 2^\alpha m,$$

m désignant un entier impair, et nous distinguerons trois cas, savoir : le cas de $\alpha = 0$, celui de $\alpha = 1$, celui de $\alpha > 1$.

Pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impair m, la formule est

$$N[m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 2\rho_2(m),$$

$\rho_2(m)$ désignant (comme à l'endroit cité plus haut) la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} d^2,$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$.

Pour $\alpha = 1$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impairement pair $2m$, on a

$$N[2m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 8\rho_2(m).$$

Enfin pour $\alpha > 1$, c'est-à-dire quand l'entier $2^\alpha m$ est pairement pair, on obtient

$$N[2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 4\left[2^{2\alpha - 1} - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_2(m).$$

Je ne pense pas qu'il soit nécessaire d'ajouter des exemples.

3. Nous venons de déterminer pour toutes les valeurs possibles de α et de m le nombre total

$$N[2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2]$$

des solutions propres ou impropres de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2.$$

Mais on peut aussi désirer d'avoir séparément le nombre

$$\mathrm{M}\left[2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2\right]$$

des solutions propres, c'est-à-dire des solutions qui subsistent quand on exige que les indéterminées x, y, z, t, u, v n'aient aucun facteur commun > 1.

Il faut alors substituer à la fonction

$$\rho_2(m)$$

la fonction

$$\mathrm{R}_2(m)$$

que nous définissons, au moyen de la valeur de m mise sous la forme d'un produit de puissances de nombres premiers distincts, en disant que si

$$m = \prod(a^r),$$

on aura

$$\mathrm{R}_2(m) = \prod\left[a^{2r} + (-1)^{\frac{a-1}{2}} a^{2r-2}\right].$$

On distinguera d'ailleurs cinq cas suivant que l'exposant α sera égal à 0, ou égal à 1, ou égal à 2, ou égal à 3, ou enfin > 3.

Pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impair m, la formule est

$$\mathrm{M}[m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 2\,\mathrm{R}_2(m).$$

Pour $\alpha = 1$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impairement pair $2m$, j'obtiens

$$\mathrm{M}[m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 8\,\mathrm{R}_2(m).$$

Ces deux équations ne diffèrent de celles qui fournissent pour m ou pour $2m$ le nombre total des représentations propres ou impropres par la forme indiquée qu'en ce que

$$\mathrm{R}_2(m)$$

y remplace

$$\rho_2(m).$$

Il n'en est pas de même pour celles qui vont suivre.

Je trouve, en effet, pour le cas de $\alpha = 2$, la formule que voici :

$$\mathrm{M}[4m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 2\left[15 - 2(-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\mathrm{R}_2(m),$$

où le coefficient de $\mathrm{R}_2(m)$ est altéré.

Même remarque pour le cas de $\alpha = 3$, où l'on a

$$\mathrm{M}[8m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 4\left[30 - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\mathrm{R}_2(m),$$

et aussi pour le cas de

$$\alpha > 3,$$

la formule devenant alors

$$\mathrm{M}\left[2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2\right] = 15.2^{2\alpha-3}\,\mathrm{R}_2(m).$$

FIN DU TOME NEUVIÈME (2e SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.