JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE LA GOURNERIE

Lettre de M. de La Gournerie sur les passages de son Traité de Géométrie descriptive qui peuvent le plus intéresser les géomètres, adressée à M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 401-420.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__401_0>

Lettre de M. de la Gournerie *sur les passages de son* Traité de Géométrie descriptive *qui peuvent le plus intéresser les géomètres, adressée à* M. LIOUVILLE.

Monsieur,

Je vous ai remis, il y a peu de jours, la troisième Partie de mon *Traité de Géométrie descriptive* : vous avez maintenant l'ouvrage entier entre les mains. Je l'ai écrit en vue des applications aux arts graphiques; mais, en cherchant à lever les difficultés que les constructions présentent dans diverses circonstances, j'ai été conduit à étudier quelques questions nouvelles de Géométrie générale, et je désire appeler votre attention sur ces recherches. La simple Géométrie m'a suffi le plus souvent, cependant il y a quelques résultats utiles que je n'ai pu établir que par l'Analyse. Je n'ai rien à vous dire sur la première Partie, qui contient les éléments, et pour le Livre V, le premier de la seconde Partie, je me borne à vous indiquer le chapitre II où j'ai développé les principes du *trait* sur les perspectives axonométrique et cavalière.

I.

Le Livre VI est consacré aux surfaces développables. Je présente d'abord quelques considérations de Géométrie plane, principalement sur les rebroussements, qu'on divise généralement en deux espèces et qu'il me paraît préférable de classer en ordres, suivant le degré de contact de la courbe avec la tangente commune des deux branches. Ces branches sont d'un même côté de la tangente dans les rebroussements d'ordre pair, et de côtés différents dans les rebroussements d'ordre impair. A un rebroussement du premier ordre, le rayon de courbure est nul; il a une grandeur finie à un rebroussement du second ordre; enfin il est infini à un rebroussement d'un ordre plus élevé. Le rayon de courbure est ici le rayon d'un cercle ayant avec la courbe quatre points communs, au moins, réunis en un seul : il passe par un point de rebroussement une infinité de cercles ayant avec la courbe trois points communs réunis en un seul. Je reviendrai plus loin sur cette observation.

Les développables se présentent souvent dans les applications comme surfaces d'ombre et comme surfaces d'égale pente. Leurs lignes doubles offrent un grand intérêt, car c'est à une ligne de ce genre que se termine soit l'ombre qui est logée dans la surface, soit l'étendue que l'on peut donner à une excavation dont les talus sont dressés sous une pente uniforme. En général, une ligne double s'arrête à deux points, au delà desquels elle est prolongée par des arcs parasites ou isolés qui appartiennent à la surface. J'appelle les points limites *sommets;* chacun d'eux est un point de rebroussement de l'arête de rebroussement, et la ligne double y touche la génératrice rectiligne qui est la tangente de rebroussement.

Après avoir étudié ces circonstances géométriques avec soin, je présente une étude détaillée de la surface de l'ombre d'une ellipse éclairée par un cercle. A cette occasion, je retrouve pour la développable circonscrite à deux surfaces du second ordre plusieurs théorèmes déjà obtenus par M. Poncelet à l'aide de la théorie des polaires réciproques; je montre notamment qu'on peut inscrire dans cette développable un nombre infini de surfaces du second ordre ayant toutes leurs centres en ligne droite, et que quatre d'entre elles se réduisent à des coniques qui sont des lignes doubles. Je présente aussi quelques théorèmes nouveaux : ainsi j'établis que toute surface du second ordre inscrite coupe la développable circonscrite suivant huit droites (réelles ou imaginaires). Les génératrices forment ainsi huit par huit des groupes qui appartiennent à des hyperboloïdes inscrits. Les génératrices d'un groupe touchent la caractéristique de l'hyperboloïde auquel elles appartiennent, en huit points qui sont sur l'arête de rebroussement de la développable.

Ce théorème permet de discuter la série des surfaces du second ordre inscrites, et de classer les différents genres de la développable;

il conduit aussi à diverses conséquences étrangères à cette surface : on voit, par exemple, que les tangentes de l'intersection de deux surfaces du second ordre appartiennent huit par huit à des hyperboloïdes, car la développable circonscrite à une surface du second ordre suivant une telle ligne est circonscrite à deux surfaces de cet ordre.

M. Chasles a établi une théorie des surfaces du second ordre homofocales, en les considérant comme inscrites dans une même développable ayant pour une de ses lignes doubles un cercle imaginaire à l'infini. Je consacre quelques articles à déduire de mes formules les résultats qu'il a obtenus.

J'étudie plusieurs surfaces d'égale pente; je prends d'abord pour directrice une courbe quelconque, puis je suppose que cette ligne est une conique. Dans ce dernier cas, on trouve une développable circonscrite à deux surfaces concentriques du second ordre : une de ses lignes doubles est à l'infini. Les autres lignes doubles se présentent d'elles-mêmes quand un des axes de la conique directrice est une ligne de plus grande pente de son plan, mais il est assez difficile de les obtenir lorsque la directrice a une position quelconque dans l'espace : il faut chercher quels sont les plans dont l'intersection avec la développable, qui est du huitième ordre, se compose de quatre droites et de deux fois une conique. Pour résoudre ce problème, je prends un système d'axes d'abord arbitraire, et je le détermine de manière que la décomposition nécessaire puisse avoir lieu dans l'équation de la surface, en introduisant d'ailleurs entre les variables une relation du premier degré qui devient l'équation du plan de la ligne double. Je vous indique ce calcul, non pas que la méthode ait rien de bien nouveau, mais à cause des divers artifices que j'ai dû employer pour arriver à la solution, et de la simplicité des résultats. Je trouve que les projections horizontales des deux lignes doubles cherchées et de la directrice sont des coniques homofocales, et que l'intersection des plans de deux d'entre elles est perpendiculaire à la trace horizontale du plan de la troisième. Il y a probablement quelque moyen facile de démontrer ces théorèmes par la Géométrie. Eu égard aux relations que je viens d'indiquer, l'établissement de l'épure de la surface d'égale pente circonscrite à une conique se fait avec une grande facilité relative.

II.

Le Livre VII est consacré aux surfaces gauches.

Il y a déjà plusieurs années que j'ai signalé la propriété des lignes d'ombre de ces surfaces, de passer toutes par certains points singuliers où deux génératrices consécutives se rencontrent : cela résulte de la multiplicité des plans tangents en ces points, et de ce que chaque ligne d'ombre rencontre toutes les génératrices. Les lignes d'ombre sont tangentes à la génératrice sur laquelle se trouve le point singulier. Quand une génératrice est parallèle à celle qui lui est infiniment voisine, les courbes d'ombre la rencontrent à l'infini et ont cette ligne pour asymptote. Dans son Mémoire sur la déformation des surfaces, M. Bour a appelé *sommets* les points où deux génératrices consécutives se coupent, et *arête* toute génératrice parallèle à celle qui lui est infiniment voisine. J'ai adopté ces expressions. Les diverses surfaces gauches que j'ai eu l'occasion d'étudier ont des sommets ou des arêtes, sauf celles qui sont du second ordre et les hélicoïdes.

J'établis avec plus de détails et de rigueur les théorèmes que j'avais déjà fait connaître sur les sommets et les arêtes, et je donne de nouvelles propositions dont je vais vous entretenir.

Toutes les fois que les directrices de la surface n'ont ni inflexion ni rebroussement, un sommet est l'extrémité de l'arc utile d'une ligne double. Ainsi, dans un conoïde droit circonscrit à un cercle, la directrice rectiligne a un segment utile et double qui se termine à deux sommets. Elle est parasite ou isolée au delà de ces points, mais elle appartient à la surface sur toute sa longueur.

Les sections de la surface par les plans qui passent à un sommet et qui ne contiennent pas la génératrice ont un rebroussement. Les tangentes de rebroussement de toutes ces sections sont dans un même plan, ainsi que cela a lieu pour les développables. M. Bour, à qui j'avais communiqué les résultats qui précèdent, a appelé ce plan *plan de rebroussement*.

M. Chasles a démontré que le plan tangent d'une surface gauche en un point d'une génératrice fait avec le plan tangent en un autre point déterminé de la même droite (*point central*) un angle dont la tangente est proportionnelle à l'abscisse du premier point mesurée à partir du second :

$$\tang \theta = \frac{x}{k}.$$

La longueur constante k ou le paramètre de distribution des plans tangents aux divers points de la génératrice, est la limite du rapport qui existe entre la plus courte distance de cette droite à une autre génératrice, et l'angle que ces lignes comprennent. Il semble, d'après cela, que toute arête étant parallèle à la génératrice qui lui est infiniment voisine, son paramètre est infini; or, quelque paradoxale que cette proposition paraisse au premier abord, il est certain que cela n'a pas toujours lieu, et que les arêtes du cylindroïde, par exemple, ont des paramètres finis.

Considérons un cylindre elliptique horizontal, coupons-le par deux plans verticaux non parallèles; élevons d'une certaine quantité l'une des sections dans son plan, de manière que tous ses points décrivent des droites verticales : si les anciennes génératrices du cylindre passent toujours par les mêmes points des sections, elles forment actuellement une surface gauche du quatrième ordre que Frézier a appelée *cylindroïde*, et qui a quelques emplois en stéréotomie.

Les génératrices du cylindre le long desquelles le plan tangent était vertical deviennent des arêtes du cylindroïde; or, quand on cherche analytiquement le paramètre des génératrices de cette surface, on trouve qu'il ne dépend pas de l'inclinaison des tangentes des directrices sur le plan horizontal, de sorte qu'il a une grandeur finie pour les arêtes comme pour les autres génératrices.

En déterminant le paramètre des arêtes du cylindroïde et des conoïdes, et le point central de ces génératrices comme appartenant à la ligne de striction, on trouve les dispositions suivantes :

1° Cylindroïde : point central à l'infini, — paramètre fini;

2° Conoïde oblique : point central à l'infini, — paramètre infini;

3° Conoïde droit : point central à distance finie, — paramètre infini.

Un examen attentif fait comprendre cette diversité.

Lorsque le point de contact d'un plan qui contient une génératrice d'une surface gauche parcourt la longueur indéfinie de cette droite, le plan tourne de 180 degrés. Si une génératrice rencontre celle qui lui est infiniment voisine, suivant une remarque de M. Bour, l'évolution entière se fait au point commun, de sorte que si l'on considère une surface développable, on doit regarder que le plan tangent tourne de 180 degrés, au moment où le point de contact passe d'une nappe à l'autre. D'après cela, pour une arête, l'évolution se fait à l'infini.

Dans la formule que j'ai rappelée, la lettre x représente l'abscisse du point considéré mesurée à partir du point central pris pour origine. Quand le point central est à l'infini, tous les points à distance finie ont des abscisses infinies. Alors, si le paramètre est fini, θ atteint 90 degrés, et le plan tangent le long de l'arête est perpendiculaire au plan qui touche la surface au point central (*plan central*). C'est en effet ce qui arrive pour le cylindroïde : le plan tangent le long d'une arête de cette surface est parallèle au plan directeur, et on sait que tous les plans centraux sont perpendiculaires à ce dernier plan.

Dans le conoïde oblique, le point central d'une arête est encore à l'infini, et par suite les abscisses des points à distance finie sont infinies. Mais l'angle du plan tangent le long de l'arête avec le plan central n'est pas de 90 degrés, et alors la formule exige que le paramètre soit infini.

Enfin, pour un conoïde droit, le point central est à distance finie, et les divers points de la génératrice ont des abscisses finies; comme d'ailleurs le paramètre est infini, θ est constamment nul, et le plan central est tangent le long de l'arête. L'angle θ devient indéterminé pour une valeur infinie de l'abscisse, ce qui devait être, puisque l'évolution se fait à une distance infinie du point central.

Les différences que j'ai reconnues pour les arêtes sont donc la conséquence de la loi de variation du plan tangent découverte par M. Chasles.

Non-seulement le paramètre d'une arête peut avoir une grandeur finie, mais il devient quelquefois nul. Cela arrive sur les surfaces développables quand l'arête de rebroussement a une asymptote : cette droite est parallèle à la génératrice qui lui est infiniment voisine, et son paramètre est nul comme celui de toutes les génératrices de la surface.

La formule qui donne la valeur de k n'apprend rien, pour une arête, quand le point central est à l'infini, parce que l'on ne peut plus dire quel est, à ce point, l'ordre de grandeur de la distance des deux génératrices consécutives par rapport à leur angle.

Si l'on considère une arête sur le cylindroïde et sur le conoïde oblique, en donnant à θ une grandeur finie quelconque, on trouve, par l'équation, que l'abscisse correspondante x a une valeur finie pour la première surface et infinie pour la seconde. Ainsi, bien que l'évolution se fasse à l'infini pour les arêtes des deux surfaces, il y a dans la disposition des plans tangents aux points qui sont voisins de ces droites, une différence que l'on peut rendre manifeste en traçant des courbes par les points des génératrices où l'obliquité du plan tangent sur le plan central a des valeurs déterminées. Ces lignes interceptent sur les génératrices des segments proportionnels; elles sont asymptotes des arêtes, concourent aux sommets, et sont tangentes en ces points à la génératrice. Quand le point central d'une arête est à l'infini et que son paramètre est infini, comme cela a lieu sur le conoïde oblique, les courbes dont nous venons de parler s'écartent de plus en plus lorsque la génératrice approche d'une arête, et cette augmentation des segments interceptés sur la génératrice n'a d'autre limite que l'infini. Sur le cylindroïde, au contraire, les distances des courbes mesurées sur les génératrices conservent des grandeurs finies.

Puisque je vous parle des génératrices singulières des surfaces gauches, je vais passer à un article qui complète leur étude, et que j'ai dû insérer dans le Livre relatif à la courbure des surfaces.

Lorsqu'une surface gauche est éclairée par un point lumineux situé dans le plan tangent le long d'une génératrice singulière, cette droite fait partie de la ligne d'ombre : c'est la branche qui passe au sommet; une autre branche rencontre toutes les génératrices et traverse nécessairement celle suivant laquelle le plan touche la surface. Or on trouve que quelle que soit la position du point lumineux dans le plan tangent, la ligne d'ombre passe par un même point de cette droite. Le plan tangent est osculateur à la surface en ce point, et son intersection avec elle y rencontre la génératrice. Lorsque le point lumineux est sur la génératrice elle-même, cette droite fait deux fois partie de la ligne d'ombre; son point d'intersection avec la courbe d'ombre proprement dite et le sommet (point central) sont conjugués harmoniques du point lumineux et de celui où le plan est osculateur de la surface.

Ces théorèmes lèvent quelques difficultés assez sérieuses que présentait le tracé des lignes d'ombre sur les surfaces gauches. On obtient le point d'osculation du plan tangent par des constructions qui ne présentent pas de difficultés : quand la surface a un plan directeur, ce point est à l'infini.

La détermination du lieu des centres de courbure des sections principales aux différents points d'une génératrice d'une surface gauche est un problème assez compliqué. Il se simplifie beaucoup pour une génératrice singulière, parce que les centres de courbure de l'une des séries s'éloignent à l'infini, et que ceux des sections par des plans perpendiculaires à la génératrice sont dans un même plan : leur lieu est une hyperbole dont une asymptote est perpendiculaire à la génératrice et rencontre cette droite au point d'osculation du plan tangent. Quand la surface a un plan directeur, le lieu des centres de courbure devient une parabole ; lorsqu'elle est développable, la courbe se réduit à deux droites : on trouve alors une infinité de centres de courbure pour la section qui a un rebroussement, ce qui tient à ce que tout cercle passant par un point de rebroussement et tangent à la tangente de rebroussement doit être considéré comme ayant en commun avec la courbe trois points infiniment rapprochés.

Quand la génératrice singulière est une arête, l'hyperbole devient équilatère; elle a cette arête pour asymptote, et son centre est au point d'osculation du point tangent. Il suit de là que de part et d'autre de ce point, les rayons principaux de courbure ont des grandeurs absolues égales. Dans le cas où l'arête a un paramètre fini, les centres de courbure sont sur une droite parallèle à une génératrice, d'où l'on voit que lorsqu'une surface gauche possède une arête ayant un paramètre fini, elle est osculée par des cylindres le long de cette droite. La réciproque de cette proposition est vraie.

Les arêtes singulières ont diverses autres propriétés : ainsi, quand une surface gauche possède un sommet à distance finie, elle est touchée par sa développable asymptote tout le long de la génératrice qui passe à ce point. Mais c'est assez vous entretenir de ce sujet; je vais passer à des questions d'une nature différente sur les surfaces gauches.

J'ai étudié d'une manière minutieuse deux surfaces gauches à plan directeur : le cylindroïde elliptique et le conoïde oblique circonscrit à une conique. Ces surfaces sont du quatrième ordre.

Le conoïde a une génératrice isolée : elle est située dans le plan de la conique directrice, passe par le point où la directrice rectiligne rencontre ce plan, et est parallèle au plan directeur. En considérant ses rencontres imaginaires avec la conique, on reconnaît qu'elle satisfait à toutes les conditions imposées aux génératrices. Les plans passant par cette droite coupent la surface suivant des coniques. Le cylindroïde a aussi une génératrice isolée qui est l'intersection des plans des directrices, et, par suite, il admet une génération par des coniques. Ces génératrices deviennent, dans certaines dispositions des données, des intersections de nappes réelles de la surface; elles peuvent aussi former des arêtes de rebroussement.

Le cylindroïde a une ligne double de contact à l'infini, de sorte que son intersection avec un plan parallèle à une génératrice possède deux branches infinies (quatre bras) ayant une même asymptote.

Comme exemple pour les surfaces qui n'ont pas de plan directeur, j'ai choisi, uniquement à cause de ses propriétés intéressantes, la surface d'intrados de la petite voûte connue en stéréotomie sous le nom de *biais passé gauche*. Ses génératrices sont parallèles deux à deux, et comme d'ailleurs elle est du quatrième ordre, on voit que son cône directeur est du second. Elle a deux sommets et, dans une certaine disposition des directrices, deux arêtes. Les sommets limitent un segment utile et double de la directrice rectiligne. Le contour apparent de cette surface, sur le plan horizontal, se compose des génératrices qui passent aux sommets et d'une hyperbole qui a pour asymptotes la projection des arêtes et la projection des génératrices horizontales. Quand les arêtes sont imaginaires, la branche correspondante de l'hyperbole est parasite. La projection de ce même contour apparent sur un plan perpendiculaire à la directrice rectiligne est formée des génératrices dont je viens de vous parler et d'une conique qui n'a jamais de partie parasite. Les sections de la surface par des plans perpendiculaires à la directrice rectiligne sont les conchoïdes à trois directrices circulaires. Enfin les génératrices appartiennent deux à deux à des plans verticaux; dans chacun de ces plans la section de la surface est complétée par une conique; la surface admet ainsi un système de génération par des coniques.

Je ne vous ai pas parlé des surfaces gauches du second ordre; c'est qu'en réalité mon ouvrage ne contient rien de nouveau sur elles, si ce n'est peut-être dans le tour de quelques démonstrations. Je vous indiquerai cependant une expression très-simple du paramètre de distribution des génératrices de l'hyperboloïde scalène, un dessin de la ligne de striction de cette surface et diverses considérations sur les hyperboloïdes de raccordement.

Je reviendrai plus loin sur les surfaces gauches, en vous parlant des surfaces lieux de normales et des hélicoïdes.

III.

La théorie de la courbure des surfaces avec ses applications aux arts graphiques forme l'objet du Livre VIII. Deux considérations très-simples me permettent d'obtenir facilement les principaux théorèmes : la première consiste en ce que si l'on considère deux plans rectangulaires, parallèles à une droite normale à une surface et infiniment voisins de cette ligne, leurs intersections avec la surface se rencontrent nécessairement; la seconde, c'est que les rayons de courbure des sections faites par des plans parallèles et infiniment voisins ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite. A l'aide de ces deux remarques, j'établis d'abord le théorème de M. Bertrand sur l'égalité des grandeurs absolues des angles formés par deux plans rectangulaires et normaux en un point considéré, avec les normales de la surface en des points situés à des distances infiniment petites égales de celui-là sur les sections faites par ces plans. De cette proposition je déduis l'existence de deux directions, au moins, dans lesquelles les angles que je viens de définir sont nuls. Les mêmes considérations appliquées aux sections normales faites dans ces directions, et dans une troisième quelconque, me donnent le théorème d'Euler et l'expression trouvée par M. Bertrand pour l'angle d'une normale en un point infiniment voisin d'un point considéré, avec le plan normal correspondant.

Comme cet angle revient à chaque instant dans les considérations que je développe, et qu'il m'était impossible de reproduire constamment sa définition, j'ai dû lui donner un nom. Je l'appelle *déviation*, et je nomme *paramètre de déviation* la distance du point considéré au point infiniment voisin divisée par la déviation correspondante. M. Transon a employé avec un sens différent ce même mot de *déviation*, mais dans des questions qui concernent la courbure des lignes. Vous-même vous êtes servi de l'expression de *déviation relative* dans la théorie des courbures comparées de deux lignes tangentes tracées sur une même surface. Je pense qu'il ne peut y avoir aucune confusion. M. Bour et M. Picart ont déjà considéré le paramètre de déviation; ils l'appellent *torsion géodésique*, mais il m'était impossible d'adopter un nom qui suppose des connaissances que je ne donne pas dans mon ouvrage.

J'indique différentes constructions pour les paramètres de déviation, et je montre qu'une certaine hyperbole équilatère joue pour ces longueurs un rôle analogue à celui de l'indicatrice pour les rayons de courbure.

M. Catalan a démontré que le rapport des rayons de courbure en deux points correspondants d'une ligne tracée sur une surface développable et de sa transformée par développement est égal au cosinus de l'angle que forme le plan osculateur de la ligne avec le plan tangent de la surface. Dans le Livre relatif aux surfaces développables, je donne, à l'aide d'une formule de la Trigonométrie sphérique, une démonstration directe de cette proposition; mais, après avoir établi le théorème de Meusnier, je montre qu'elle en est une conséquence.

Lorsqu'on développe une développable, les points d'une courbe tracée sur cette surface décrivent des trajectoires qui sont toujours normales au plan de développement, et qui forment une surface dont la section par un plan tangent à la développable est une transformée de la courbe primitive. Cette courbe et sa transformée appartiennent donc à une même surface, et la seconde de ces lignes est une section normale qui touche la première au point où elle rencontre la génératrice de contact du plan tangent avec la développable. On voit que le théorème de Meusnier est immédiatement applicable.

On ne possédait pas de formule pour déterminer les rayons de courbure de la section d'une surface par son plan tangent. J'en donne une dans laquelle le rayon d'une branche est exprimé en fonction des rayons de courbure principaux de la surface, et des coordonnées, par rapport au plan tangent, du point infiniment voisin de celui que l'on considère, dans la section normale passant par l'asymptote de l'indicatrice qui touche la branche. J'ai obtenu cette formule par de simples considérations géométriques et par l'analyse; j'en ai fait ensuite l'application au tore : le résultat est d'une grande simplicité.

Les surfaces gauches lieux de normales ont de l'importance en stéréotomie; j'en présente une théorie géométrique due principalement à mon collègue M. Mannheim, mais que j'ai développée sur plusieurs points, ainsi que je l'indique dans une note.

Concevons que l'on élève à une génératrice d'une surface gauche et par son point central une perpendiculaire égale au paramètre de distribution, que par son extrémité on mène deux droites rectangulaires qui rencontrent la génératrice, et qu'on prenne pour origine le point où la première coupe cette ligne : le théorème déjà rappelé de M. Chasles montre que la seconde droite sera telle, que l'angle formé par les rayons vecteurs de deux quelconques de ses points aura la même grandeur que l'angle compris entre les plans tangents aux points de la génératrice qui sont leurs projections.

Cette seconde droite, que j'appelle *droite auxiliaire*, avec M. Mannheim, donne ainsi une représentation géométrique de la loi de variation des plans tangents aux différents points de la génératrice.

On trouve encore que l'ordonnée à l'origine de la droite auxiliaire est moyenne proportionnelle entre les grandeurs absolues des rayons de courbure principaux de la surface à ce point.

Au moyen de la droite auxiliaire, on peut résoudre par des constructions d'une grande simplicité les principaux problèmes qui concernent une surface gauche, quand les plans tangents en trois points de chaque génératrice sont connus. Or, pour une surface lieu de normales, on a immédiatement le plan tangent au point où la génératrice considérée perce la surface directrice, et il est facile de reconnaître à l'aide d'un théorème de M. Sturm que le plan d'une section principale de cette surface est tangent à la surface des normales au centre de courbure de l'autre section principale; la méthode que je viens d'indiquer peut donc être employée pour l'étude d'une surface gauche lieu de normales. Elle fait trouver très-facilement plusieurs théorèmes connus, notamment ceux que M. Joachimsthal a donnés dans votre journal, et plusieurs propositions nouvelles qu'il serait trop long de développer ici.

Cette théorie n'a pas seulement de l'importance pour les surfaces lieux de normales, elle conduit encore à des constructions très-simples pour déterminer en un point d'une surface le rayon de courbure d'une section normale, le paramètre de déviation et la direction conjuguée qui correspondent à un azimut donné, lorsqu'on connaît les plans et les rayons des sections principales.

Les principales applications que je présente de la théorie de la courbure des surfaces sont relatives à la détermination des rayons de courbure et des plans osculateurs d'une courbe donnée par ses projections, à la construction des sommets des surfaces d'égale pente, au tracé des tangentes à la courbe d'intersection de deux surfaces qui se touchent, enfin à la détermination des tangentes et des points singuliers d'une ligne d'ombre. Je m'arrêterai quelques instants à cette dernière question.

Les surfaces, telles qu'on les considère dans les problèmes d'ombre, recouvrent des corps opaques, et la courbe de contact d'un cône circonscrit ne forme ligne d'ombre propre, lorsqu'un point lumineux est au sommet, que lorsque les génératrices rectilignes sont extérieures. Si, près du point de tangence, les génératrices sont dans l'intérieur du corps, la courbe de contact n'a aucune importance.

D'après cela, je divise les points d'une courbe d'ombre en *réels* et *virtuels*. Les derniers sont situés sur des tangentes géométriques qui n'existent pas comme rayons de lumière. Si le corps opaque se trouvait de l'autre côté de la surface, les points réels se trouveraient virtuels et réciproquement. Ainsi, par exemple, les points réels de la ligne d'ombre propre d'une vis deviennent virtuels quand on considère l'écrou.

Les points réels et les points virtuels forment quelquefois des courbes distinctes, mais le plus souvent on trouve une seule courbe composée d'arcs réels et d'arcs virtuels : il est alors fort important de déterminer les points limites. En ces points, la génératrice du cône circonscrit passe de l'intérieur à l'extérieur du corps; elle a donc un contact du second ordre avec la surface, et, par suite, elle est une des deux asymptotes de l'indicatrice. Il résulte de là, en vertu du théorème des tangentes conjuguées, qu'aux points limites le rayon de lumière touche la ligne d'ombre.

Puisqu'en un point limite la génératrice a un contact du second ordre avec la surface, il faut qu'un point de la courbe d'intersection, c'est-à-dire un point de la ligne d'ombre portée par la surface sur elle-même, soit venu se confondre avec le point de la courbe d'ombre propre situé sur la même génératrice. Une étude attentive de la question montre que la courbe d'ombre portée est composée d'arcs réels et d'arcs virtuels comme la courbe d'ombre propre; que ces deux lignes ont les mêmes points limites, les mêmes tangentes en ces points, et qu'ainsi les arcs réels de la courbe d'ombre portée continuent les arcs réels de la courbe d'ombre propre en se raccordant avec eux. Il suit de là que les points limites ne présentent rien de remarquable sur les corps éclairés, mais ces diverses circonstances n'en sont pas moins intéressantes sous le rapport géométrique, et il est nécessaire de les connaître pour tracer avec exactitude les ombres sur les surfaces à courbures opposées.

Cette théorie n'est pas entièrement nouvelle; on en trouve des parties dans les ouvrages de MM. Hachette et Leroy, mais je crois que vous reconnaîtrez que j'ai levé les obscurités assez grandes dont elle était encore entourée.

Je ne m'arrêterai pas à vous développer les constructions que j'ai données pour la détermination des points limites des courbes d'ombre, et je termine sur ce sujet en vous citant deux propositions que je crois nouvelles.

Quand sur une surface la courbe d'ombre propre et la courbe d'ombre portée par une autre surface quelconque se rencontrent, ces lignes sont tangentes à deux diamètres conjugués de l'indicatrice du point commun. — Ce théorème permet de construire mécaniquement la direction conjuguée d'une tangente, en un point donné de la surface d'un corps; il appartient en partie à M. Mannheim, car je l'ai obtenu en complétant une remarque qu'il m'avait communiquée.

Quand une surface est osculée par un plan en un point, si elle est éclairée par un point lumineux situé dans ce plan, deux branches de la courbe d'ombre passent par le point d'osculation, et sont tangentes aux deux droites qui forment le diamètre de l'indicatrice du troisième ordre par rapport à la direction du rayon de lumière. — Ce théorème ne conduit pas, en général, à des constructions faciles, mais il explique la manière dont la courbe d'ombre est disposée dans un cas intéressant. On peut en déduire un résultat que je vous ai signalé plus haut sur le point où la courbe d'ombre d'une surface gauche coupe une génératrice singulière, lorsque le point lumineux est dans le plan tangent le long de cette droite.

A l'aide du théorème de M. Bertrand, j'établis immédiatement l'existence des lignes de courbure. J'expose, d'après M. Dupin, la théorie de ces lignes sur les surfaces du second ordre, et j'en fais l'application à un ellipsoïde scalène en reproduisant les épures de Monge. Je montre ensuite que chacune de ces figures donne la projection des lignes de courbure d'une série indéfinie de surfaces du second ordre, si l'on considère le système complet des coniques qui y sont représentées.

Je dis peu de chose sur les lignes asymptotiques. J'établis que sur une surface gauche toutes ces lignes (autres que les génératrices) passent à chaque sommet et y sont, en général, tangentes à la génératrice. Je considère ensuite les surfaces de révolution, et je trouve que quand la séparation des parties convexes et à courbures opposées est faite par un parallèle le long duquel la surface a un plan tangent unique, les asymptotiques sont asymptotes de ce cercle; et que quand un parallèle d'inflexion fait la séparation, chacun de ses points est un point de rebroussement pour une asymptotique.

Je termine le huitième Livre en considérant les lignes tracées sur une surface et tangentes aux sections normales surosculées par des cercles. Par chaque point d'une surface il passe trois sections de ce genre, et, par suite, les lignes en question présentent trois séries dont une, au moins, est toujours réelle. J'établis l'équation différentielle de ces lignes, et j'en fais l'application aux surfaces du second ordre. Je trouve d'abord les génératrices rectilignes, puis des courbes qui, lorsqu'on les considère sur l'ellipsoïde central d'un corps, sont les *polhodies* de M. Poinsot, c'est-à-dire les lignes de contact de l'ellipsoïde avec une développable circonscrite à cette surface et à une sphère concentrique. J'adopte le nom de *polhodie* en l'étendant aux courbes de même définition sur toutes les surfaces du second ordre.

J'ai déjà publié ces résultats, au moins en partie, dans votre journal. M. Mannheim en a trouvé une démonstration géométrique qui m'a permis de reléguer mon analyse dans une note.

IV.

Le Livre IX est consacré aux hélicoïdes.

Dans les problèmes graphiques qui concernent ces surfaces, on voit constamment paraître une longueur égale au pas des hélices divisé par le double du rapport de la circonférence au diamètre : c'est le rapport constant qui existe entre l'ordonnée rectiligne d'un point d'une hélice et l'angle qui mesure son abscisse curviligne dans la section droite du cylindre sur lequel on peut concevoir cette courbe tracée. Je suppose que lorsque l'on opère sur un hélicoïde, on construit tout d'abord ce paramètre, et, afin de simplifier le langage, je lui ai donné un nom, celui de *pas réduit*.

Après avoir défini les hélicoïdes réglés, j'ai déterminé le paramètre de leurs génératrices, et j'ai cherché à présenter sur les signes des quantités qui entrent dans son expression, et sur la disposition des constructions graphiques par lesquelles on peut l'obtenir, des conventions qui fassent toujours connaître son signe, c'est-à-dire le sens dans lequel le plan tangent tourne quand le point de contact s'éloigne du point central.

Je ne m'arrête pas aux développements contenus dans le chapitre de la théorie générale, et je passe aux hélicoïdes individuels.

Pour l'hélicoïde développable, je me borne à vous dire qu'à l'occasion de cette surface je suis revenu sur des considérations que j'avais déjà présentées dans le sixième Livre au sujet des inflexions des courbes transformées par développement, et du cas où le rebroussement de premier ordre qu'une courbe tracée sur la surface possède au passage d'une nappe à l'autre se change, dans le développement, en un rebroussement de second ordre.

Dans le chapitre relatif à la surface de la vis à filets triangulaires, je vous indiquerai des tracés simples pour la détermination du plan tangent en un point, et la recherche du point où un plan contenant une génératrice touche la surface.

M. Poncelet a donné une construction très-élégante de la projection horizontale de la ligne d'ombre, dans le cas de rayons parallèles. Je fais connaître pour ce problème plusieurs autres constructions faciles : une d'elles permet de déterminer les points de la ligne d'ombre qui sont sur une hélice donnée ; une autre, moins commode que celle de M. Poncelet pour la discussion de la courbe, me paraît préférable dans la pratique pour la tracer d'une manière prompte et exacte.

De la construction même de la projection horizontale de la courbe d'ombre, on déduit sans difficulté la tangente de cette courbe en un certain point qui, considéré sur l'hélicoïde, n'a aucune position particulière. Comme d'ailleurs on connaît la direction du rayon de lumière, et la génératrice qui est une des deux asymptotes de l'indicatrice, on peut obtenir par le théorème des tangentes conjuguées la deuxième asymptote. J'arrive ainsi, par des raisonnements très-simples, à la solution générale des problèmes qui exigent la connaissance de l'indicatrice, tels que la détermination des points limites des parties utiles des lignes d'ombre et celle des tangentes de ces courbes, même dans le cas où les rayons sont divergents.

Je donne une démonstration géométrique de la propriété que possède la surface de la vis à filets carrés d'être la seule surface gauche dans laquelle les rayons de courbure aient en un point des grandeurs absolues égales.

Les deux propositions suivantes sont nouvelles :

Sur la surface de la vis à filets carrés, les lignes tangentes aux sections normales surosculées par des cercles se coupent sous des angles de 60 degrés. — Il est inutile de rappeler que les génératrices sont les lignes de l'une des trois séries.

La projection, sur un plan perpendiculaire à l'axe, du lieu des centres de courbure principaux d'une surface de vis à filets carrés, aux divers points d'une génératrice, est une hyperbole équilatère dont l'axe transverse a une longueur double du pas réduit de la surface.

Il existe pour toutes les surfaces à plan directeur un théorème analogue à ce dernier : La projection du lieu des centres de courbure principaux d'un conoïde général aux différents points d'une génératrice, sur un plan parallèle au plan directeur, est une hyperbole.

Parmi les constructions que je donne pour les hélicoïdes réglés, quelques-unes sont assez simples : d'abord celle de la courbe d'ombre dans le cas de rayons parallèles, ensuite et surtout la détermination des asymptotes de l'indicatrice en un point quelconque. Je montre que l'on obtient facilement ces droites en construisant les asymptotes de l'indicatrice de la surface de révolution qui aurait le même axe et la même méridienne, et en leur faisant éprouver un déplacement d'après le pas réduit de la surface et l'inclinaison des tangentes à la méridienne. On étend sans difficulté cette construction au cas où les asymptotes de l'indicatrice sont réelles sur l'hélicoïde, mais imaginaires sur la surface de révolution. La solution est plus compliquée quand il faut avoir les indicatrices elliptiques de la partie convexe de l'hélicoïde.

Dans l'étude de ces questions, j'obtiens le théorème suivant : Si l'on considère la série des hélicoïdes que peut décrire une courbe plane en tournant autour d'une droite située dans son plan, lorsqu'on fait varier le pas des hélices, les asymptotes de indicatrices de ces diverses surfaces, en un point donné de la méridienne commune, forment un cône du second ordre dont un des plans tangents est parallèle à l'axe et perpendiculaire au plan qui contient la méridienne.

L'épure d'un serpentin me donne une occasion de revenir sur les points limites des parties réelles des courbes de contour apparent. Cette question est identique à celle des points limites des courbes d'ombre.

V.

Dans le Livre X, je m'occupe des surfaces topographiques.

On emploie généralement pour la construction du plan tangent à ces surfaces une méthode due à Meusnier, dans laquelle on ramène le problème à une question de maximum, comme cela a déjà été fait dans d'autres circonstances. Ainsi, pour déterminer un plan qui touche une surface et contienne une droite, on trace des tangentes aux lignes de niveau de la surface par les points de la droite situés respectivement dans les mêmes plans horizontaux, et on cherche quelle est celle des lignes ainsi obtenues qui fait un angle maximum ou minimum avec une droite quelconque du plan. Les diverses tangentes forment un conoïde circonscrit à la surface et qui est touché par le plan tangent le long d'une arête. La théorie des génératrices singulières des surfaces gauches se rattache donc directement à la méthode de Meusnier; elle donne à ses diverses applications une plus grande clarté.

La théorie des parties virtuelles des courbes d'ombre et de leurs points limites explique également toutes les particularités que présente le problème du cône circonscrit à la surface du terrain.

Je n'ai pas parlé des faîtes et des thalwegs, parce qu'il y a encore des obscurités sur la nature géométrique de ces lignes; j'ai seulement montré comme un fait, par l'étude de quelques surfaces, que les lignes de plus grande pente sont réparties par groupes, et que celles d'entre elles qui forment transition ont, pour les pentes, des propriétés spéciales. Les projections des faîtes sur un plan horizontal sont ainsi des lignes de transition dans une série de courbes représentées par une même équation avec un paramètre variable. Il semble d'après cela que la question des faîtes et des thalwegs se rattache à une théorie connue; toutefois elle présente encore des difficultés sérieuses, au moins pour l'interprétation géométrique.

L'ouvrage est terminé par un chapitre dans lequel j'explique l'usage des surfaces topographiques pour remplacer les courbes à double entrée et l'anamorphose des tableaux graphiques. J'aurais désiré présenter quelques exemples sur des problèmes d'application, mais il m'aurait fallu entrer dans des détails techniques sur les différentes questions.

Je vous laisserais peut-être une fausse opinion sur mon travail, si je ne vous disais pas en terminant que le genre de mérite que j'ai le plus recherché est une grande exactitude dans le trait. J'ai désiré que tout lecteur connaissant les arts graphiques, et principalement la stéréotomie, pût dire à chaque construction : C'est bien ainsi qu'on doit opérer.

Je vous prie, Monsieur et cher ancien Professeur, de me pardonner la longueur de cette lettre, et d'agréer l'expression de mon respect et de mon entier dévouement.

Paris, 17 novembre 1864.