JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; seizième article

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 389-400.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__389_0>

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

Par M. J. LIOUVILLE.

SEIZIÈME ARTICLE.

1. Dans ce seizième article, nous considérons un entier donné m, pair ou impair, et nous le décomposons de toutes les manières possibles en une somme de deux carrés plus un reste que nous regardons à son tour comme le produit de deux facteurs dont le second sera essentiellement impair. En d'autres termes, nous écrivons de toutes les manières possibles

$$m = m_1^2 + m_2^2 + d_3 \delta_3,$$

m_1 et m_2 étant des entiers indifféremment pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs, tandis que les entiers d_3, δ_3 sont positifs, d_3 pair ou impair, mais δ_3 toujours impair. Tel est le mode de partition qui servira de base à toutes les formules contenues dans cet article. On trouvera dans ces formules, tantôt une fonction

$$\mathrm{F}(x, y, z)$$

impaire par rapport à chacune des trois variables x, y, z dont elle dépend, tantôt une fonction

$$\mathcal{F}(x, y, z, t)$$

de quatre variables, impaire par rapport à x, par rapport à y, et par rapport au groupe des deux dernières variables z, t. Après les longues explications que nous avons données dans notre quinzième article, nos lecteurs savent bien quelle est la nature des fonctions que ces qualifications désignent.

2. Prenant donc pour point de départ l'équation

$$m = m_1^2 + m_2^2 + d_3 \delta_3,$$

telle qu'elle a été définie au n° **1**, je considère l'ensemble des équations particulières qu'elle contient, c'est-à-dire l'ensemble des systèmes

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ \delta_3;$$

puis posant

$$x = \delta_3 - 2m_2,$$
$$y = d_3 + m_2 - m_1,$$
$$z = d_3 + m_2 + m_1,$$

j'introduis une fonction impaire

$$F(x, y, z)$$

de ces dernières variables. A chaque système

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ \delta_3$$

répond une valeur de notre fonction, savoir

$$F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + m_2 - m_1,\ d_3 + m_2 + m_1).$$

Prenons la somme algébrique pour tous les systèmes et désignons-la par L, en sorte que

$$L = \sum F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + m_2 - m_1,\ d_3 + m_2 + m_1).$$

C'est à cette somme

$$L$$

que s'appliquera notre premier théorème. Nous trouvons qu'elle est nulle toutes les fois que m ne peut pas être représenté en nombres entiers par une somme de deux carrés. Dans le cas contraire, elle peut avoir une valeur différente de zéro et dont il s'agit de donner l'expression générale.

Soit

$$m = a^2 + b^2$$

une quelconque des équations qu'on peut écrire en mettant m sous la forme d'une somme de deux carrés, mais sous la condition essentielle que l'entier a soit > 0, tandis que l'entier b peut être indifféremment positif, nul ou négatif. Pour chaque équation de cette espèce, formons la somme

$$\sum F(2a - 2s - 1,\ a - b,\ a + b),$$

où le signe

$$\sum$$

porte sur la variable s dont les valeurs successives sont

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ a - 1;$$

puis, faisant la somme de ces sommes partielles, formons à son tour la somme totale

$$\sum \left[\sum F(2a - 2s - 1,\ a - b,\ a + b) \right],$$

relativement à toutes les équations de la forme

$$m = a^2 + b^2$$

qui peuvent exister sous la condition déjà énoncée de $a > 0$. Cette somme totale sera la valeur de L.

Ainsi on a

$$L = \sum \left[\sum F(2a - 2s - 1,\ a - b,\ a + b) \right],$$

ou bien, explicitement,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + m_2 - m_1,\ d_3 + m_2 + m_1) \\ &\quad = \sum \left[\sum F(2a - 2s - 1,\ a - b,\ a + b) \right]. \end{aligned} \right.$$

Voilà notre première formule.

3. Nous obtiendrons une seconde formule, également relative à l'équation

$$m = m_1^2 + m_2^2 + d_3 \delta_3$$

du n° **1**, si en continuant à considérer une fonction

$$F(x, y, z)$$

de trois variables, impaire par rapport à chacune de ces variables, nous prenons cette fois

$$\begin{aligned} x &= \delta_3 - 2m_2, \\ y &= d_3 + m_2 - m_1, \\ z &= \delta_3 + 2m_1. \end{aligned}$$

A chaque système

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ \delta_3$$

répondra naturellement une valeur de notre fonction, savoir

$$F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + m_2 - m_1,\ \delta_3 + 2m_1).$$

Prenons la somme algébrique de ces valeurs pour tous les systèmes que l'équation

$$m = m_1^2 + m_2^2 + d_3 \delta_3$$

comporte d'après les explications données au n° **1**, et désignons la somme dont il s'agit par M, en sorte que

$$M = \sum F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + m_2 - m_1,\ \delta_3 + 2m_1).$$

C'est à cette somme

$$M$$

que s'appliquera notre second théorème. Nous trouvons qu'elle est nulle toutes les fois que m ne peut pas être représenté en nombres entiers par une somme de deux carrés. Dans le cas contraire, elle peut avoir une valeur différente de zéro et dont je vais donner l'expression générale.

A cet effet, soit

$$m = a^2 + b^2,$$

l'entier a étant supposé essentiellement $>$ o, tandis que l'entier b est indifféremment positif, nul ou négatif. Pour chaque équation de cette espèce, formons la somme partielle

$$\sum F(2a - 2s - 1,\ a - b,\ 2b + 2s + 1),$$

où le signe

$$\sum$$

porte sur la variable s dont les valeurs successives sont

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ a - 1;$$

puis de là passons à la somme totale

$$\sum \left[\sum F(2a - 2s - 1,\ a - b,\ 2b + 2s - 1) \right]$$

prise pour toutes les équations de la forme

$$m = a^2 + b^2$$

qui peuvent exister sous la condition énoncée de $a > 0$. Cette somme totale sera la valeur de M.

Ainsi on a

$$M = \sum \left[\sum F(2a - 2s - 1,\ a - b,\ 2b + 2s + 1) \right],$$

ou bien, explicitement,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + m_2 - m_1,\ \delta_3 + 2m_1) \\ &\quad = \sum \left[\sum F(2a - 2s - 1,\ a - b,\ 2b + 2s + 1) \right]. \end{aligned} \right.$$

Voilà notre seconde formule.

3. Mais la formule vraiment remarquable à laquelle nous voulons arriver, au sujet de l'équation

$$m = m_1^2 + m_2^2 + d_3 \delta_3$$

du n° **1**, contient une fonction

$$\mathcal{F}(x, y, z, t)$$

de quatre variables, impaire par rapport à chacune des deux premières variables x, y, et impaire aussi par rapport au groupe des deux autres variables z, t.

A chaque système

$$m_1, \; m_2, \; d_3, \; \delta_3$$

répond une valeur de notre fonction

$$\mathcal{F}(x, y, z, t),$$

savoir

$$\mathcal{F}(\delta_3 - 2m_2, \; d_3 + m_2 - m_1, \; d_3 + m_2 + m_1, \; \delta_3 + 2m_1).$$

Formons la somme algébrique

$$\sum \mathcal{F}(\delta_3 - 2m_2, \; d_3 + m_2 - m_1, \; d_3 + m_2 + m_1, \; \delta_3 + 2m_1)$$

pour tous les systèmes que l'équation

$$m = m_1^2 + m_2^2 + d_3 \delta_3$$

du n° **1** comporte, et désignons-la par N. Je trouve que l'on a

$$\mathrm{N} = 0$$

toutes les fois que m n'est pas la somme de deux carrés. Mais dans le cas contraire, la valeur de N peut ne pas être nulle, et on l'exprime ainsi qu'il suit.

Posons, en nombres entiers,

$$m = a^2 + b^2,$$

l'entier a étant > 0, tandis que l'entier b peut être indifféremment positif, nul ou négatif, et formons pour chaque équation de cette espèce la somme partielle

$$\sum \mathcal{F}(2a - 2s - 1,\ a - b,\ a + b,\ 2b + 2s + 1),$$

où le signe

$$\sum$$

porte sur la variable s dont les valeurs successives sont

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ a - 1;$$

puis de là passons à la somme totale

$$\sum \left[\sum \mathcal{F}(2a - 2s - 1,\ a - b,\ a + b,\ 2b + 2s + 1) \right]$$

prise pour toutes les équations de la forme

$$m = a^2 + b^2$$

qui peuvent exister sous la condition énoncée de $a > 0$. Cette somme totale sera la valeur de N.

Ainsi on a

$$\mathrm{N} = \sum \left[\sum \mathcal{F}(2a - 2s - 1,\ a - b,\ a + b,\ 2b + 2s + 1) \right],$$

ou bien, explicitement,

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & \sum \mathcal{F}(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + m_2 - m_1,\ d_3 + m_2 + m_1,\ \delta_3 + 2m_1) \\ & \quad = \sum \left[\sum \mathcal{F}(2a - 2s - 1,\ a - b,\ a + b,\ 2b + 2s + 1) \right]. \end{aligned} \right.$$

Voilà notre troisième formule, ou plutôt voilà notre formule fondamentale; car elle renferme implicitement les formules (1) et (2).

Pour déduire la formule (1) de la formule (3), il suffit de supposer la fonction

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t)$$

indépendante de t et réduite à une fonction

$$F(x, y, z)$$

impaire par rapport à chacune des variables x, y, z. Les conditions imposées à la fonction

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t)$$

seront alors remplies, et la formule (3) se changera dans la formule (1). Elle se changera au contraire dans la formule (2) si l'on suppose la fonction

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t)$$

indépendante de z et réduite à une fonction

$$F(x, y, t)$$

impaire par rapport à chacune des variables x, y, t.

4. Au reste, la formule (3), qui est à quatre variables, contient une infinité de formules à trois variables comme (1) et (2); et celles-ci à leur tour en renferment une infinité d'autres à deux variables ou à une seule variable.

Parmi les formules contenant une fonction à deux variables, je citerai celle-ci :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum(-1)^{\frac{\delta_3-1}{2}+m_2} F(d_3+m_2-m_1,\ d_3+m_2+m_1) \\ &\qquad = \sum F(a-b,\ a+b), \end{aligned}\right.$$

qu'on déduit aisément de la formule (1) et où le signe sommatoire au second membre ne porte plus que sur une portion des couples (a, b) fournis par l'équation

$$m = a^2 + b^2,$$

savoir sur ceux où l'entier a est non-seulement positif, mais encore impair. La fonction F qui figure dans l'équation (4) doit être impaire par rapport à chacune des deux variables dont elle dépend.

Parmi les formules contenant une fonction d'une seule variable, je citerai la suivante :

$$(5)\qquad \sum(-1)^{m_1+m_2}F(d_3+m_2-m_1)=(-1)^m\sum aF(b-a),$$

qui se déduit sans peine de la formule (2). La fonction F qui s'y trouve doit être impaire par rapport à la variable dont elle dépend. La sommation au second membre porte cette fois sur tous les couples (a, b) fournis par l'équation

$$m=a^2+b^2,$$

où l'on suppose $a>0$. L'entier a peut d'ailleurs être indifféremment pair ou impair.

5. Il est bon de vérifier notre formule

$$(3)\quad \begin{cases} \sum \mathfrak{F}(\delta_3-2m_2,\ d_3+m_2-m_1,\ d_3+m_2+m_1,\ \delta_3+2m_1) \\ \quad =\sum\left[\sum \mathfrak{F}(2a-2s-1,\ a-b,\ a+b,\ 2b+2s+1)\right] \end{cases}$$

au moins dans quelques cas très-simples.

Soit d'abord

$$m=1.$$

L'équation

$$m=m_1^2+m_2^2+d_3\delta_3,$$

du n° **1**, ne pourra avoir lieu qu'en prenant

$$m_1=0,\quad m_2=0,\quad d_3=1,\quad \delta_3=1.$$

La valeur du premier membre de l'équation (3) sera donc

$$\mathfrak{F}(1, 1, 1, 1).$$

Pour trouver celle du second membre, on n'aura de même à considérer qu'une seule équation de la forme

$$m = a^2 + b^2,$$

savoir

$$1 = 1^2 + 0^2.$$

On ne pourra donc prendre que

$$a = 1$$

avec

$$b = 0,$$

et il n'y aura aussi qu'une seule valeur de s, savoir

$$s = 0.$$

Le second membre de l'équation (3) est donc égal à

$$\mathcal{F}(1, 1, 1, 1)$$

comme le premier membre.

Pour

$$m = 2,$$

on a cinq équations de la forme

$$m = m_1^2 + m_2^2 + d_3\,\delta_3,$$

où l'on se souvient que δ_3 est essentiellement impair. Les voici :

$$2 = 0^2 + 0^2 + 2.1,$$
$$2 = 1^2 + 0^2 + 1.1,$$
$$2 = (-1)^2 + 0^2 + 1.1,$$
$$2 = 0^2 + 1^2 + 1.1,$$
$$2 = 0^2 + (-1)^2 + 1.1.$$

Il y aura donc cinq termes au premier membre de l'équation (3); mais deux sont nuls d'eux-mêmes et deux autres se détruisent entre eux, attendu que, par la nature de la fonction $\mathcal{F}$, on doit avoir

$$\mathcal{F}(1, 0, 2, 3) = 0, \quad \mathcal{F}(3, 0, 0, 1) = 0$$

et

$$\mathcal{F}(-1, 2, 2, 1) = -\mathcal{F}(1, 2, 2, 1).$$

Le seul qui subsiste est

$$\mathcal{F}(1, 2, 0, -1).$$

Or, en vertu des deux équations

$$2 = 1^2 + 1^2, \quad 2 = 1^2 + (-1)^2,$$

on retrouve ce même terme au second membre, où il est accompagné d'un autre terme

$$\mathcal{F}(1, 0, 2, 3)$$

qui est nul de lui-même. La vérification cherchée a donc lieu.

Pour

$$m = 3,$$

le second membre de la formule (3) est égal à zéro, attendu que l'équation

$$3 = a^2 + b^2$$

est impossible. Mais comme on a les dix équations suivantes

$$\begin{array}{ll}
3 = 0^2 + 0^2 + 3.1, & 3 = 0^2 + 1^2 + 2.1, \\
3 = 0^2 + 0^2 + 1.3, & 3 = 1^2 + (-1)^2 + 1.1, \\
3 = 1^2 + 0^2 + 2.1, & 3 = 1^2 + 1^2 + 1.1, \\
3 = (-1)^2 + 0^2 + 2.1, & 3 = (-1)^2 + 1^2 + 1.1, \\
3 = 0^2 + (-1)^2 + 2.1, & 3 = (-1)^2 + (-1)^2 + 1.1,
\end{array}$$

le premier membre de la formule (3) sera composé de dix termes. Aucun de ces termes n'est nul de lui-même; mais les deux termes qui répondent aux équations placées sur une même ligne horizontale sont partout égaux et de signes contraires, attendu que par la nature de la fonction $\mathcal{F}$ on a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(-1, 3, 3, 1) = -\mathcal{F}(1, 3, 3, 1),\\
&\mathcal{F}(3, -1, 1, 3) = -\mathcal{F}(3, 1, 1, 3),\\
&\mathcal{F}(-1, 1, 3, 3) = -\mathcal{F}(1, 1, 3, 3),\\
&\mathcal{F}(-1, 3, 1, -1) = -\mathcal{F}(1, 3, 1, -1),\\
&\mathcal{F}(3, 1, -1, -1) = -\mathcal{F}(3, 1, 1, 1).
\end{aligned}$$

Le total est donc égal à zéro, conformément à la formule (3).

Je n'entrerai pas dans les détails du calcul pour le cas de

$$m = 4.$$

Je me bornerai à dire que la valeur commune des deux membres de l'équation (3) est alors

$$\mathcal{F}(3, 2, 2, 1) + \mathcal{F}(1, 2, 2, 3).$$

Observons en terminant que quoiqu'il s'agisse dans l'article actuel d'un entier m quelconque, et non plus seulement d'un entier impair comme dans notre quinzième article où d'ailleurs le mode de partition différait beaucoup de celui que marque l'équation

$$m = m_1^2 + m_2^2 + d_3\delta_3$$

employée ici par nous avec un dernier terme $d_3\delta_3$ qui n'est plus assujetti à avoir une valeur paire, cependant la formule (3) dont nous venons de nous occuper et la formule affectée du même chiffre dans notre quinzième article dérivent d'une source commune, comme on pourra le voir quand nous entrerons dans le détail des démonstrations.