JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CASIMIR RICHAUD

Énoncés de quelques théorèmes sur la possibilité de l'équation $x^2 - \mathrm{N}y^2 = -1$ en nombres entiers

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 384-388.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__384_0>

ÉNONCÉS DE QUELQUES THÉORÈMES

SUR

LA POSSIBILITÉ DE L'ÉQUATION $x^2 - Ny^2 = -1$ EN NOMBRES ENTIERS.

Lettre adressée à M. Liouville par M. Casimir Richaud.

Paris, le 20 novembre 1864.

Monsieur et très-honoré maître,

Je me suis occupé dans ces derniers temps de quelques questions de théorie des nombres relatives à la résolution en nombres entiers de l'équation $x^2 - Ny^2 = P$.

J'ai l'honneur de vous adresser aujourd'hui une partie des résultats auxquels je suis parvenu sur l'équation particulière $x^2 - Ny^2 = -1$. Dans le cas où vous accueilleriez favorablement les théorèmes énoncés ci-après, je suis en mesure de vous transmettre les démonstrations. Les théorèmes **11** et **12** peuvent être étendus à une combinaison quelconque des facteurs premiers ω, A, B,..., a, b,..., et les conditions restrictives des mêmes théorèmes peuvent être modifiées, sans que l'équation correspondante cesse d'être possible en nombres entiers.

Agréez, je vous prie, Monsieur et très-vénéré maître, l'assurance des sentiments respectueux de votre serviteur dévoué,

C. Richaud.

1. Si A, B, C,..., L désignent des nombres premiers de la forme $8n+5$, les équations

$$x^2 - 2A^\alpha y^2 = -1,$$

$$x^2 - 2A^{2\alpha+1}B^{2\beta+1}y^2 = -1,$$

$$x^2 - 2A^{2\alpha}B^{2\beta}\ldots L^{2\lambda}y^2 = -1$$

sont toujours possibles en nombres entiers.

2. Si A, B, C,..., L désignent des nombres premiers de la forme $8n+5$, et si B, C,..., L ne sont pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - 2Au^2$, les équations

$$x^2 - 2A^{\alpha}B^{6}y^2 = -1,$$
$$x^2 - 2A^{\alpha}B^{2\beta+1}C^{2\gamma+1}y^2 = -1,$$
$$x^2 - 2A^{2\alpha+1}B^{2\beta}C^{2\gamma}\ldots L^{2\lambda}y^2 = -1$$

sont toujours possibles en nombres entiers.

3. Si A désigne un nombre premier $8n+5$, et si a, b, c,..., l représentent des facteurs premiers $8n+1$, les équations

$$x^2 - 2A^{2m+1}a^{\alpha}y^2 = -1,$$
$$x^2 - 2A^{2m+1}a^{2\alpha+1}b^{2\beta+1}y^2 = -1,$$
$$x^2 - 2A^{2m+1}a^{2\alpha}b^{2\beta}\ldots l^{2\lambda}y^2 = -1$$

sont toujours possibles en nombres entiers, pourvu que a, b, c,..., l ne soient pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - 2Au^2$.

4. A et B désignant deux nombres premiers $8n+5$, et a, b, c,..., l des facteurs premiers $8n+1$, les équations

$$x^2 - 2A^{2\alpha+1}B^{2\beta+1}a^{m}y^2 = -1,$$
$$x^2 - 2A^{2\alpha+1}B^{2\beta+1}a^{2m}b^{2n}\ldots l^{2s}y^2 = -1$$

sont toujours possibles en nombres entiers, pourvu que a, b,..., l ne soient pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - ABu^2$.

5. Si A, B, C,..., L, M désignent des nombres premiers $8n+5$, l'équation

$$x^2 - 2A^{2\alpha+1}B^{2\beta+1}\ldots L^{2\lambda+1}M^{2\mu+1}y^2 = -1$$

est toujours possible en nombres entiers, lorsque l'équation

$$x^2 - 2AB\ldots Ly^2 = -1$$

est soluble en nombres de la même nature et lorsqu'en outre M n'est pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - 2AB\ldots Lu^2$, pour le cas de

$$\left(\frac{A}{M}\right) = \left(\frac{B}{M}\right) = \ldots = \left(\frac{L}{M}\right) = 1 \text{ (notation de Legendre).}$$

6. A désignant un nombre premier $8n+5$ et $a, b, \ldots, l, m$ des nombres premiers $8n+1$, l'équation

$$x^2 - 2A^{2\rho+1}a^{2\alpha+1}b^{2\beta+1}\ldots l^{2\lambda+1}m^{2\mu+1}y^2 = -1$$

est toujours possible en nombres entiers, si l'équation

$$x^2 - 2Aab\ldots ly^2 = -1$$

est soluble en nombres de la même espèce et si de plus m n'est pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - 2Aab\ldots lu^2$, pour le cas de

$$\left(\frac{A}{m}\right) = -1, \quad \left(\frac{a}{m}\right) = \left(\frac{b}{m}\right) = \ldots = \left(\frac{l}{m}\right) = 1 \text{ (notation de Legendre).}$$

Remarque. — Les théorèmes précédents, relatifs au facteur 2, peuvent être étendus à un facteur premier quelconque ω de la forme $4n+1$.

7. ω représentant un facteur premier $4n+1$ et A, B,..., L désignant des nombres premiers de la même forme non compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$, les équations

$$x^2 - \omega^m A^{2\alpha+1} y^2 = -1,$$
$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{\alpha} y^2 = -1,$$
$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2\alpha+1} B^{2\beta+1} y^2 = -1,$$
$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2\alpha} B^{2\beta}\ldots L^{2\lambda} y^2 = -1$$

sont toujours possibles en nombres entiers.

8. ω désignant un nombre premier $4n+1$ et A, B, C,..., L des facteurs premiers de même forme non compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$, les équations

$$x^2 - \omega^{2m+1} A^\alpha B^\beta y^2 = -1,$$
$$x^2 - \omega^{2m+1} A^\alpha B^{2\beta+1} C^{2\gamma+1} y^2 = -1,$$
$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2\alpha+1} B^{2\beta} C^{2\gamma} \ldots L^{2\lambda} y^2 = -1$$

sont possibles en nombres entiers, pourvu que B, C,..., L ne soient pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega A u^2$.

9. ω représentant un nombre premier $4n+1$, A un facteur premier de même forme non compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$ et $a, b, c, \ldots, l$ des facteurs premiers $4n+1$ compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$, les équations

$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2m+1} a^\alpha y^2 = -1,$$
$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2m+1} a^{2\alpha+1} b^{2\beta+1} y^2 = -1,$$
$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2m+1} a^{2\alpha} b^{2\beta} \ldots l^{2\lambda} y^2 = -1$$

sont toujours possibles en nombres entiers, pourvu que $a, b, \ldots, l$ ne soient pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - Au^2$.

10. ω représentant un nombre premier $4n+1$, A et B deux nombres premiers de même forme non compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$ et $a, b, \ldots, l$ des facteurs premiers $4n+1$ compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$, les équations

$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2\alpha+1} B^{2\beta+1} a^\alpha y^2 = -1,$$
$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2\alpha+1} B^{2\beta+1} a^{2\alpha} b^{2\beta} \ldots l^{2\lambda} y^2 = -1$$

sont toujours possibles en nombres entiers, pourvu que les facteurs premiers $a, b, \ldots, l$ ne soient pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - ABu^2$.

11. ω désignant un nombre premier $4n+1$ et A, B, C,..., L, M des nombres premiers de même forme non compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$, l'équation

$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2\alpha+1} B^{2\beta+1} \ldots L^{2\lambda+1} M^{2\mu+1} y^2 = -1$$

est toujours possible en nombres entiers, lorsque l'équation

$$x^2 - \omega AB \ldots L y^2 = -1$$

admet des solutions de la même nature et lorsque de plus M n'est pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega AB \ldots L u^2$, pour le cas de

$$\left(\frac{A}{M}\right) = \left(\frac{B}{M}\right) = \ldots = \left(\frac{L}{M}\right) = 1 \text{ (notation de Legendre).}$$

12. ω désignant un nombre premier $4n+1$, A un nombre de même nature non compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$ et $a, b, \ldots, l, m$ des facteurs premiers $4n+1$ compris au contraire dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$, l'équation

$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2p+1} a^{2\alpha+1} b^{2\beta+1} \ldots l^{2\lambda+1} m^{2\mu+1} y^2 = -1$$

est toujours possible en nombres entiers, lorsque l'équation

$$x^2 - \omega A ab \ldots l . y^2 = -1$$

est soluble en entiers, et lorsque de plus m n'est pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega A ab \ldots l u^2$, pour le cas de

$$\left(\frac{A}{m}\right) = -1, \quad \left(\frac{a}{m}\right) = \left(\frac{b}{m}\right) = \ldots = \left(\frac{l}{m}\right) = 1 \text{ (notation de Legendre).}$$