JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; quinzième article

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 321-336.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__321_0>

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

QUINZIÈME ARTICLE.

1. Soit m un nombre impair donné. Posons de toutes les manières possibles

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2^{\alpha_3+1} m_3,$$

m_1, m_2, m_3 étant des entiers : savoir m_1 impair, positif ou négatif; m_2 pair ou impair, positif, nul ou négatif; enfin m_3 impair et positif. Puis décomposons m_3 en un produit de deux facteurs conjugués d_3, δ_3 de manière que l'on ait

$$m_3 = d_3 \delta_3,$$

d_3 et δ_3 étant, comme m_3, des entiers impairs et positifs. L'expression de m deviendra

$$m = m_1^2 + 4 m_2^2 + 2^{\alpha_3+1} d_3 \delta_3.$$

Elle indique pour le nombre m un mode de partition qui servira de base à toutes les formules contenues dans cet article.

Nous n'avons rien dit jusqu'ici de l'exposant α_3; mais il est clair que l'on a

$$\alpha_3 = 0$$

quand m est de la forme

$$4\mu + 3,$$

tandis que l'on a au contraire

$$\alpha_3 > 0$$

quand m est de la forme

$$4\mu + 1.$$

Ajoutons que dans ce dernier cas la valeur de α_3 peut être plus ou moins grande; pour un même nombre m, elle peut prendre différentes valeurs dans les équations particulières dont l'équation

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2^{\alpha_3+1} d_3 \delta_3$$

est le type général.

Dans le cas de

$$m = 4\mu + 3,$$

où $\alpha_3 = 0$, on retombe sur l'équation

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3 \delta_3$$

que nous avons considérée dans nos articles treizième et quatorzième. Aussi avons-nous surtout en vue dans ce moment le cas de

$$m = 4\mu + 1.$$

L'unité seule est exclue; car pour $m = 1$, notre équation fondamentale est évidemment impossible.

2. Pour éviter toute obscurité, expliquons nettement ici une fois pour toutes le sens que nous attachons, dans ce genre de recherches, au mot *fonction* d'une ou de plusieurs variables x, y, etc; ce que c'est pour nous qu'une fonction *paire* ou *impaire* par rapport à une variable; ce que c'est aussi qu'une fonction *paire* ou *impaire par rapport à un groupe de deux ou de plusieurs variables*, locution que nous avons hasardée récemment et qui mérite à notre avis d'être adoptée.

Dans cet article, comme dans ceux qui ont précédé, nos variables

$$x,\ y,\ \text{etc.}$$

seront des entiers susceptibles seulement de certains systèmes de valeurs, et nous entendons par fonction de ces variables une quantité qui correspond à ces systèmes en variant ou du moins pouvant varier d'un système à l'autre. Nous désignons cette quantité par un des signes ordinaires de fonction, par

$$\mathfrak{F}(x, y, \ldots)$$

si l'on veut. Mais il ne s'agit pas ici de fonctions analytiques; il s'agit de fonctions purement numériques, dont les valeurs ne répondent qu'à des groupes distincts de valeurs des variables, sans qu'on ait à y mêler aucune idée de continuité. Ce n'est pas que nous voulions exclure les fonctions analytiques. Nous employons souvent ces fonctions, mais nous pouvons aussi en employer d'autres. Il y a toujours pour nous une infinité de fonctions qui peuvent indifféremment servir à un même objet et que dès lors nous regardons comme équivalentes relativement au but que nous poursuivons, si distinctes qu'elles soient d'ailleurs.

Que la variable x ne puisse par exemple être égale qu'à un entier impair; alors la fonction analytique et continue

$$\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)$$

sera pour nous complétement équivalente à l'expression

$$(-1)^{\frac{x-1}{2}}$$

qui au point de vue ordinaire en diffère tout à fait. Et on pourrait encore la remplacer par l'expression purement symbolique

$$\left(\frac{-1}{x}\right)$$

prise dans le sens étendu que lui attribue Jacobi.

Admettons que la variable x existe seule et qu'il s'agisse d'une fonction

$$\mathfrak{F}(x)$$

de cette variable. La fonction

$$\mathfrak{F}(x)$$

sera parfaitement définie à nos yeux, si pour les diverses valeurs dont x est susceptible on nous dit quelle sera la valeur de $\mathfrak{F}(x)$. Qu'il y ait, par exemple, six valeurs de x, comme

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = -1, \quad x = 3, \quad x = 5, \quad x = -5,$$

et qu'on nous donne

$$\mathfrak{F}(0),\ \mathfrak{F}(1),\ \mathfrak{F}(-1),\ \mathfrak{F}(3),\ \mathfrak{F}(5),\ \mathfrak{F}(-5).$$

Cela suffira pour que nous connaissions la fonction $\mathfrak{F}(x)$ autant qu'il le faut pour notre usage. L'interpolation fournirait, si on le voulait, une infinité de fonctions analytiques remplissant les conditions indiquées. On s'en servira, si cela est commode, ou bien on ne les recherchera pas : elles ne sont jamais indispensables.

Parmi les valeurs dont x est susceptible dans notre exemple, j'en vois deux, 1 et -1, puis deux autres, 5 et -5, qui ne diffèrent que par le signe. Si l'on a

$$\mathfrak{F}(-1) = \mathfrak{F}(1), \quad \mathfrak{F}(-5) = \mathfrak{F}(5),$$

la fonction $\mathfrak{F}(x)$ sera *paire*. En général, une fonction $\mathfrak{F}(x)$ est paire, si pour toutes les valeurs égales et de signes contraires (x et $-x$) que x peut prendre, on a

$$\mathfrak{F}(-x) = \mathfrak{F}(x).$$

Mais notez bien que dans le cas particulier cité et où l'on peut faire $x = 3$ sans pouvoir faire $x = -3$, je n'aurai pas à rechercher si l'on a, oui ou non,

$$\mathfrak{F}(-3) = \mathfrak{F}(3).$$

Puisque $\mathfrak{F}(-3)$ ne se présentera pas, peu nous importe sa valeur.

C'est au caractère opposé

$$\mathfrak{F}(-x) = -\mathfrak{F}(x)$$

que se reconnaît une fonction *impaire*. Mais quand x peut prendre la valeur o, il est naturel et commode d'exiger en outre que

$$\mathfrak{F}(0) = 0.$$

Dans l'exemple qui précède et où l'on admet la valeur $x = 0$, la fonction $\mathfrak{F}(x)$ sera impaire si l'on a tout à la fois

$$\mathfrak{F}(-1) = -\mathfrak{F}(1), \quad \mathfrak{F}(-5) = -\mathfrak{F}(5),$$

et

$$\mathfrak{F}(0) = 0.$$

Une fonction

$$\mathfrak{F}(x, y, \ldots)$$

de plusieurs variables est parfaitement définie à nos yeux quand on en donne la valeur pour chacun des systèmes de valeurs dont x, y, etc., sont susceptibles. Elle est *paire* relativement à x quand deux valeurs égales et opposées pouvant appartenir à cette variable avec les mêmes valeurs des autres variables y, etc., on a toujours

$$\mathfrak{F}(-x, y, \ldots) = \mathfrak{F}(x, y, \ldots).$$

L'équation générale

$$\mathfrak{F}(-x, y, \ldots) = -\mathfrak{F}(x, y, \ldots)$$

indique au contraire une fonction *impaire*, mais sous la condition spéciale ajoutée par nous, que quand la valeur zéro se présente on ait

$$\mathfrak{F}(0, y, \ldots) = 0.$$

Toutes ces remarques ont déjà été faites dans nos précédents articles; mais nous avons cru devoir les reproduire avec une certaine insistance afin de pouvoir dorénavant nous servir en toute sécurité de ces mots *fonction paire* ou *fonction impaire par rapport à une variable*, dont la signification restera clairement fixée. Avons-nous besoin d'ajouter qu'une fonction paire ou impaire par rapport à une variable x peut être aussi paire ou impaire par rapport à une autre variable y, si des conditions analogues à celles que nous venons d'indiquer pour x ont également lieu pour y. On peut donc parler d'une fonction impaire de x, y, z, c'est-à-dire d'une fonction impaire par rapport à chacune des variables x, y, z, sans sortir du cercle des définitions ci-dessus, que l'on doit regarder comme des définitions anciennes.

Mais on peut encore avoir à employer des fonctions *paires* ou *impaires* par rapport à un *groupe* de plusieurs variables x, y, etc.; et il fallait ici des définitions nouvelles que nous avons données pour la première fois dans notre quatorzième article, car les variables ne sont plus considérées isolément et l'une après l'autre, mais au contraire simultanément. Nous dirons donc désormais (et ceci s'étend à des groupes de trois variables et au delà) qu'une fonction

$$\mathfrak{F}(x, y, z, \ldots)$$

est *paire par rapport au groupe des deux variables* x, y, quand ces deux variables *à la fois* venant à changer de signes en conservant leurs valeurs numériques, tandis que les autres variables gardent leurs valeurs et leurs signes, la valeur de la fonction elle-même ne change aucunement, en sorte que

$$\mathfrak{F}(-x, -y, z, \ldots) = \mathfrak{F}(x, y, z, \ldots).$$

Au contraire la fonction serait *impaire* par rapport au groupe des deux variables x, y, si dans les mêmes conditions elle changeait de signe tout en conservant sa valeur numérique, c'est-à-dire si elle vérifiait l'équation

$$\mathfrak{F}(-x, -y, z, \ldots) = -\mathfrak{F}(x, y, z, \ldots),$$

qui devient

$$\mathfrak{F}(0, -y, z, \ldots) = -\mathfrak{F}(0, y, z, \ldots),$$

ou bien

$$\mathfrak{F}(-x, 0, z, \ldots) = -\mathfrak{F}(x, 0, z, \ldots),$$

quand on a $x = 0$, ou bien $y = 0$, et que nous complétons naturellement en écrivant que

$$\mathfrak{F}(0, 0, z, \ldots) = 0,$$

quand on a en même temps $x = 0$ et $y = 0$.

Nous avons déjà eu dans notre quatorzième article et nous aurons plus bas occasion de parler d'une fonction $\mathfrak{F}(x, y, z, t)$ impaire par rapport à x, par rapport à y et par rapport au groupe z, t. Pour x et pour y, le mot *impaire* reste soumis à la définition ancienne; relativement au groupe z, t, c'est à la définition nouvelle qu'il faut se rattacher.

3. Revenant maintenant à l'équation

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2^{\alpha_3+1} d_3 \delta_3$$

du n° **1**, je considère l'ensemble des équations particulières qu'elle contient, c'est-à-dire l'ensemble des systèmes

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ 2^{\alpha_3}\delta_3.$$

A chacun de ces systèmes répond un système de trois variables

$$x,\ y,\ z$$

que je définis par les équations

$$\begin{aligned} x &= 2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2, \\ y &= d_3 + 2m_2 - m_1, \\ z &= d_3 + 2m_2 + m_1. \end{aligned}$$

Si donc on considère une fonction

$$F(x, y, z)$$

de ces trois variables, la valeur de cette fonction pour les valeurs indiquées s'écrira

$$F\left(2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1\right).$$

Prenons la somme algébrique relativement à tous les systèmes

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ 2^{\alpha_3}\delta_3,$$

et désignons-la par

$$P,$$

en sorte que

$$P = \sum F\left(2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1\right).$$

C'est à cette somme P, mais dans l'hypothèse d'une fonction

$$F(x, y, z)$$

impaire par rapport à chacuné des trois variables x, y, z, que s'appliquera notre premier théorème.

Quand on prend

$$m = 4\mu + 3,$$

la somme P est égale à zéro. Même en prenant

$$m = 4\mu + 1,$$

on a encore

$$P = 0$$

si $2m$ n'est pas exprimable par la somme de deux carrés. Dans le cas contraire, P obtient une valeur qui peut différer de zéro : il s'agit de donner l'expression de cette valeur.

Soit

$$2m = \alpha^2 + \beta^2;$$

α et β seront naturellement des entiers impairs. Il pourra y avoir plusieurs équations de ce genre, et α, β pourraient y être affectés indifféremment du signe $\pm$; mais, d'une part, nous supposerons α positif et même $\alpha > 1$; d'autre part, nous affecterons β d'un signe tel, que l'entier

$$\frac{\alpha + \beta}{2}$$

soit impair. Cela posé, soit s un entier variable de 0 à $\frac{\alpha - 3}{2}$, en sorte que l'on ait successivement

$$s = 0, \quad s = 1, \quad s = 2, \ldots, \quad s = \frac{\alpha - 3}{2}.$$

Pour chaque couple

$$\alpha, \beta,$$

on donnera à s les valeurs indiquées et on formera la somme partielle

$$\sum F\left(\frac{\alpha-\beta}{2}, \alpha-2s-1, \beta+2s+1\right)$$

où la fonction F est celle qui figure dans l'expression de P. Après quoi, faisant la somme de ces sommes partielles, on calculera la somme totale

$$\sum\left[\sum F\left(\frac{\alpha-\beta}{2}, \alpha-2s-1, \beta+2s+1\right)\right],$$

pour tous les groupes (α, β). Cette somme totale sera la valeur de P.

Ainsi

$$P=\sum\left[\sum F\left(\frac{\alpha-\beta}{2}, \alpha-2s-1, \beta+2s+1\right)\right],$$

ou bien, explicitement :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum F\left(2^{\alpha_3}\delta_3-2m_2,\ d_3+2m_2-m_1,\ d_3+2m_2+m_1\right)\\&\quad=\sum\left[\sum F\left(\frac{\alpha-\beta}{2}, \alpha-2s-1, \beta+2s+1\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Cette formule (1) est une extension à des entiers impairs quelconques de la formule (A) de notre treizième article qui ne s'appliquait qu'à des entiers $4\mu+3$.

Nous n'appliquerons la formule (1) qu'à quelques exemples, que nous ne développerons même pas complétement.

Pour

$$m=5,$$

l'équation

$$m=m_1^2+4m_2^2+2^{\alpha_3+1}d_3\delta_3$$

donne lieu aux deux équations particulières

$$5=1^2+4.0^2+4.1.1,$$
$$5=(-1)^2+4.0^2+4.1.1.$$

Le premier membre de l'équation (1) est donc

$$F(2, 0, 2) + F(2, 2, 0).$$

Il est donc nul par la nature même de la fonction impaire F qui est égale à zéro quand une des variables y est égale à zéro. Pour calculer le second membre, on considérera les représentations de l'entier 10 par une somme de deux carrés. La seule à employer ici sera

$$10 = 3^2 + (-1)^2;$$

car la racine du premier carré devant être positive et > 1, il faut mettre de côté les équations

$$10 = (-3)^2 + (\pm 1)^2,$$

et

$$10 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2.$$

L'équation

$$10 = 3^2 + 1^2$$

doit aussi être rejetée par la raison que

$$\frac{3+1}{2}$$

est un nombre pair. Il n'y a donc qu'un groupe α, β, savoir

$$\alpha = 3, \quad \beta = -1,$$

et il ne comporte pour s que la seule valeur

$$s = 0.$$

Le second membre de l'équation (1) se réduit donc a

$$F(2, 2, 0),$$

et il est nul comme le premier.

Pour

$$m = 9,$$

l'équation générale

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2^{\alpha_3+1} d_3 \delta_3$$

fournit six équations particulières contenues dans les deux identités

$$9 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 8.1.1$$

et

$$9 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 2)^2 + 4.1.1.$$

La valeur du premier membre se trouve nulle encore cette fois, eu égard à la nature de la fonction F. Quant au second membre, on ne doit employer pour le former que l'équation

$$18 = 3^2 + 3^2,$$

qui donne $\alpha = 3 = \beta$. Il est donc nul aussi, car on a généralement

$$F\left(\frac{\alpha - \beta}{2}, \alpha - 2s - 1, \beta + 2s + 1\right) = 0$$

quand $\alpha = \beta$.

Mais pour

$$m = 13,$$

les deux membres de l'équation (1) ne sont plus nuls. Leur valeur commune est

$$F(2, 4, 2) + F(2, 2, 4),$$

ainsi qu'il est facile de s'en assurer.

4. Considérant toujours l'équation

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2^{\alpha_3} d_3 \delta_3$$

du n° **1**, et une fonction

$$F(x, y, z)$$

impaire par rapport à chacune des trois variables

$$x, y, z,$$

je fais à présent

$$x = 2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2,$$

$$y = d_3 + 2m_2 - m_1,$$

mais

$$z = 2^{\alpha_3}\delta_3 + m_1,$$

puis je somme tous les termes

$$F(2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ 2^{\alpha_3}\delta_3 + m_1)$$

relatifs aux divers systèmes

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ 2^{\alpha_3}\delta_3,$$

et je désigne par Q le résultat de cette sommation, en sorte que

$$Q = \sum F(2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ 2^{\alpha_3}\delta_3 + m_1).$$

C'est sur la somme

$$Q$$

que portera notre second théorème.

Quand on prend

$$m = 4\mu + 3,$$

la somme Q est égale à zéro; c'est ce qu'exprime la formule (B) de notre quatorzième article. Même en prenant

$$m = 4\mu + 1,$$

on a encore

$$Q = 0$$

si $2m$ n'est pas exprimable par une somme de deux carrés. Dans le cas contraire, Q obtient une valeur qui peut différer de zéro et dont il s'agit de former l'expression.

Soit, comme au n° 3,

$$2m = \alpha^2 + \beta^2,$$

α étant un entier essentiellement positif et même > 1, et le signe de β étant fixé de telle sorte que l'entier

$$\frac{\alpha+\beta}{2}$$

soit impair. Pour chaque groupe possible

$$\alpha,\ \beta$$

cherchez la somme

$$\sum F\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha-2s-1,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

où le signe

$$\sum$$

porte sur la variable s dont les valeurs successives sont

$$0,\ 1,\ 2,\ldots,\ \frac{\alpha-3}{2};$$

puis de là passez à la somme totale

$$\sum\left[\sum F\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha-2s-1,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right],$$

pour tous les groupes α, β. Vous aurez ainsi la valeur de Q.

En d'autres termes, on a

$$Q=\sum\left[\sum F\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha-2s-1,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right],$$

ou bien, explicitement :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}&\sum F\left(2^{\alpha_s}\delta_3-2m_2,\ d_3+2m_2-m_1,\ 2^{\alpha_s}\delta_3+m_1\right)\\ &\qquad=\sum\left[\sum F\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha-2s-1,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

La formule (2) généralise la formule (B) de notre quatorzième article, qui ne s'appliquait qu'aux entiers m de la forme $4\mu+3$.

5. Pour étendre à son tour à des entiers impairs quelconques la formule (C) de ce quatorzième article, il faut considérer une fonction

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t)$$

de quatre variables. Cette fonction

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t)$$

devra être impaire par rapport à chacune des deux variables x, y et par rapport au groupe des deux variables z, t.

Les valeurs des variables

$$x, \ y, \ z, \ t$$

continueront à être tirées du mode de partition du nombre impair m que fournit l'équation

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2^{\alpha_3+1} d_3 \delta_3$$

du n° **1**. Nous prendrons en effet

$$\begin{aligned} x &= 2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2, \\ y &= d_3 + 2m_2 - m_1, \\ z &= d_3 + 2m_2 + m_1, \\ t &= 2^{\alpha_3}\delta_3 + m_1. \end{aligned}$$

Puis faisant la somme des quantités

$$\mathfrak{F}(2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2, \ d_3 + 2m_2 - m_1, \ d_3 + 2m_2 + m_1, \ 2^{\alpha_3}\delta_3 + m_1)$$

qui répondent successivement aux divers systèmes

$$m_1, \ m_2, \ d_3, \ 2^{\alpha_3}\delta_3,$$

nous désignerons par

R

le résultat de cette sommation, en sorte que

$$R = \sum \mathcal{F}\left(2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1,\ 2^{\alpha_3}\delta_3 + m_1\right).$$

C'est à cette somme R que s'appliquera notre nouveau théorème.

La somme R est nulle quand

$$m = 4\mu + 3,$$

et c'est ce qu'exprime la formule (C) de notre quatorzième article. Même pour

$$m = 4\mu + 1,$$

on a encore

$$R = 0,$$

si $2m$ n'est pas exprimable sous la forme d'une somme de deux carrés. Mais quand $2m$ est la somme de deux carrés, R obtient une valeur qui peut différer de zéro et qu'il s'agit de donner.

Soit, comme au n° **3** et au n° **4**,

$$2m = \alpha^2 + \beta^2,$$

α et β naturellement entiers impairs, α positif et même > 1, β d'un signe tel, que l'entier

$$\frac{\alpha+\beta}{2}$$

soit impair. Pour chaque groupe

$$\alpha,\ \beta$$

on formera d'abord la somme partielle

$$\sum \mathcal{F}\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha - 2s - 1,\ \beta + 2s + 1,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

où le signe

$$\sum$$

porte sur la variable

$$s$$

dont les valeurs successives sont

$$0,\ 1,\ 2,\ldots,\ \frac{\alpha-3}{2}.$$

Puis on fera le total

$$\sum\left[\sum \mathcal{F}\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha-2s-1,\ \beta+2s+1,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$$

de ces sommes partielles pour tous les groupes

$$\alpha,\ \beta.$$

Ce total sera précisément la valeur de

$$\mathrm{R}.$$

Ainsi on aura

$$\mathrm{R}=\sum\left[\sum \mathcal{F}\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha-2s-1,\ \beta+2s+1,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right],$$

ou bien, explicitement :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum \mathcal{F}\left(2^{\alpha_3}\delta_3-2m_2,\ d_3+2m_2-m_1,\ d_3+2m_2+m_1,\ 2^{\alpha_3}\delta_3+m_1\right)\\ &\qquad=\sum\left[\sum \mathcal{F}\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha-2s-1,\ \beta+2s+1,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

C'est par cette formule très-générale que nous terminerons notre quinzième article. On en déduit les formules (1) et (2) en supposant la fonction $\mathcal{F}$ indépendante de t, ou de z, et impaire par rapport à chacune des trois autres variables.