JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HERMITE

Sur quelques formules relatives au module dans la théorie des fonctions elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 313-320.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__313_0>

SUR

QUELQUES FORMULES RELATIVES AU MODULE DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. HERMITE.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LVII, séance du 21 décembre 1863.

Les expressions en produits infinis des fonctions elliptiques, savoir :

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{k}}\;\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots},$$

$$\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\sqrt{\frac{k'}{k}}\;\frac{2\sqrt[4]{q}\cos x(1+2q^2\cos 2x+q^4)(1+2q^4\cos 2x+q^8)(1+2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots},$$

$$\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\sqrt{k'}\;\frac{(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots},$$

donnent immédiatement, pour la racine quatrième du module et de son complément, des fonctions uniformes à l'égard de la variable ω définie en posant $q=e^{i\pi\omega}$. C'est ce qu'on voit dans les *Fundamenta*, § 36, où sont établies ces relations :

$$\sqrt[4]{k}=\sqrt{2}\,.\sqrt[8]{q}\,\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}:$$

$$\sqrt[4]{k'}=\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots},$$

ou encore sous forme entière

$$\sqrt[4]{k}=\sqrt{2}\,.\sqrt[8]{q}\,[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots]^2\,[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots],$$
$$\sqrt[4]{k'}=[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots]\,[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^2.$$

Mais cette conséquence importante ne résulte pas des développements sous forme de quotients de séries des mêmes fonctions, savoir :

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots},$$

$$\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots},$$

$$\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{k'}\,\frac{1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots}:$$

car c'est seulement alors la racine carrée du module et celle de son complément qui sont données en fonction de q par ces formules

$$\sqrt{k} = \frac{2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots},$$

$$\sqrt{k'} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots}.$$

Dans cette Note, je me propose d'établir, pour $\sin\operatorname{am}x$, $\cos\operatorname{am}x$, $\Delta\operatorname{am}x$, de nouveaux développements en série de sinus et de cosinus, analogues aux précédents, mais qui donneront aussi bien que les produits infinis les racines quatrièmes de k et k' comme fonctions uniformes de la variable ω. On en déduira, en effet, ces formules remarquables, où le signe $\sum$ s'étend à toutes les valeurs positives et négatives de n :

$$\sqrt[4]{k} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\sum q^{4n^2+2n}}{\sum q^{2n^2+n}}, \qquad \sqrt[4]{k'} = \frac{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}}{\sum q^{2n^2+n}},$$

$$\sqrt[4]{k} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\sum(-1)^n q^{2n^2+n}}{\sum(-1)^n q^{2n^2}}, \qquad \sqrt[4]{k'} = \frac{\sum(-1)^n q^{n^2}}{\sum(-1)^n q^{2n^2}},$$

$$\sqrt[4]{k} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\sum q^{2n^2+n}}{\sum q^{n^2}}, \qquad \sqrt[4]{k'} = \frac{\sum(-1)^n q^{2n^2}}{\sum q^{n^2}},$$

et auxquelles Jacobi est déjà parvenu dans son Mémoire intitulé : *Uber unendliche Reihen, deren Exponenten zugleich in zwei verschiednen quadratischen Formen enthalten sind,* en les déduisant des produits infinis en q rapportés plus haut. Les propriétés si importantes auxquelles donnent lieu ces quantités $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{k'}$, lorsqu'on y remplace ω par $\frac{c+d\omega}{a+b\omega}$, a, b, c, d étant des nombres entiers assujettis à la condition $ad-bc=1$, résultent de ces formules, et peuvent être établies, comme j'espère le montrer, d'une manière simple et facile.

I. Pour abréger l'écriture, je conviendrai de désigner les quatre fonctions

$$\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right),\quad \Theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right),\quad H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right),\quad H_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right),$$

par $\theta(x)$, $\theta_1(x)$, $\eta(x)$, $\eta_1(x)$, de sorte qu'on ait, en mettant en évidence la quantité ω dont il a été question tout à l'heure :

$$\begin{aligned}
\theta(x,\omega) &= 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots,\\
\theta_1(x,\omega) &= 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots,\\
\eta(x,\omega) &= 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \ldots,\\
\eta_1(x,\omega) &= 2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \ldots.
\end{aligned}$$

Cela posé, la transformation du second ordre donnera ces deux systèmes de relation :

$$\left\{\begin{aligned}
2\theta^2(x,\omega) &= \left[\sqrt{1+k}\;\theta\left(x,\frac{\omega}{2}\right) + \sqrt{1-k}\;\theta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right)\right]\sqrt{\frac{2K}{\pi}};\\
2\theta_1^2(x,\omega) &= \left[\sqrt{1+k}\;\theta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right) + \sqrt{1-k}\;\theta\left(x,\frac{\omega}{2}\right)\right]\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\\
2\eta^2(x,\omega) &= \left[\sqrt{1+k}\;\theta\left(x,\frac{\omega}{2}\right) - \sqrt{1-k}\;\theta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right)\right]\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\\
2\eta_1^2(x,\omega) &= \left[\sqrt{1+k}\;\theta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right) - \sqrt{1-k}\;\theta\left(x,\frac{\omega}{2}\right)\right]\sqrt{\frac{2K}{\pi}},
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\theta(x,\omega)\,\theta_1(x,\omega) &= \sqrt[4]{k'}\,\theta(2x,2\omega)\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\\
\eta(x,\omega)\,\eta_1(x,\omega) &= \sqrt[4]{k'}\,\eta(2x,2\omega)\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\\
\eta(x,\omega)\,\theta(x,\omega) &= \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{2}}\,\eta\left(x,\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{\frac{2K}{2}},\\
\eta_1(x,\omega)\,\theta_1(x,\omega) &= \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{2}}\,\eta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\\
\eta(x,\omega)\,\theta_1(x,\omega) &= \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}\sqrt[4]{kk'}}{\sqrt{2}}\,\eta\left(x,\frac{\omega+1}{2}\right)\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\\
\eta_1(x,\omega)\,\theta(x,\omega) &= \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}\sqrt[4]{kk'}}{\sqrt{2}}\,\eta_1\left(x,\frac{\omega+1}{2}\right)\sqrt{\frac{2K}{\pi}};
\end{aligned}\right.$$

et c'est le second dont je vais faire usage comme il suit :

Considérons, par exemple, le sinus d'amplitude : on aura

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\eta(x,\omega)}{\theta(x,\omega)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\eta(x,\omega)\,\theta_1(x,\omega)}{\theta(x,\omega)\,\theta_1(x,\omega)}.$$

Or, en employant la première et la cinquième de ces relations, on obtiendra de suite

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{k}}\cdot\frac{\eta\left(x,\frac{\omega+1}{2}\right)}{\theta(2x,2\omega)},$$

ou bien, $\sin\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{k}}\,\dfrac{\sqrt[8]{q}\sin x + \sqrt[8]{q^9}\sin 3x - \sqrt[8]{q^{25}}\sin 5x - \ldots}{1 - 2q^2\cos 4x + 2q^8\cos 8x - 2q^{18}\cos 12x + \ldots}$,

et le même procédé de transformation, appliqué à $\cos\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi}$ et $\Delta\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi}$, donnera les résultats que voici

$$\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} &= \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{k}}\,\frac{\eta\left(x,\frac{\omega+1}{2}\right)}{\theta(2x,2\omega)} = \frac{1}{\sqrt[4]{k}}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\sum(-1)^n q^{2n^2+n}\sin(4n+1)x}{\sum(-1)^n q^{2n^2}\cos 4nx},\\
\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{k'}{k}}\,\frac{\eta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right)}{\theta(2x,2\omega)} = \sqrt[4]{\frac{k'}{k}}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\sum q^{2n^2+n}\cos(4n+1)x}{\sum(-1)^n q^{2n^2}\cos 4nx},\\
\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} &= e^{\frac{i\pi}{8}}\sqrt[4]{k'}\,\frac{\eta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right)}{\eta_1\left(x,\frac{\omega+1}{2}\right)} = \sqrt[4]{k'}\,\frac{\sum q^{2n^2+n}\cos(4n+1)x}{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}\cos(4n+1)x},
\end{aligned}\right.$$

et, en second lieu,

$$
\left\{
\begin{aligned}
\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} &= \frac{\sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt[4]{k^3}} \frac{\eta(2x,\ 2\omega)}{\eta_1\left(x,\ \frac{\omega+1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt[4]{k^3}} \frac{\sqrt{2}\sqrt[8]{q^3}\sum q^{8n^2+4n}\sin(8n+2)x}{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}\cos(4n+1)x},\\
\cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} &= \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{k'^3}{k^3}} \frac{\eta(2x,\ 2\omega)}{\eta\left(x,\ \frac{\omega}{2}\right)} = \sqrt[4]{\frac{k'^3}{k^3}} \frac{\sqrt{2}\sqrt[8]{q^3}\sum q^{8n^2+4n}\sin(8n+2)x}{\sum q^{2n^2+n}\sin(4n+1)x},\\
\Delta \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} &= e^{-\frac{i\pi}{8}} \sqrt[4]{k'^3} \frac{\eta\left(x,\ \frac{\omega+1}{2}\right)}{\eta\left(x,\ \frac{\omega}{2}\right)} = \sqrt[4]{k'^3} \frac{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}\sin(4n+1)x}{\sum q^{2n^2+n}\sin(4n+1)x}.
\end{aligned}
\right.
$$

Tels sont donc les modes nouveaux de développements des fonctions elliptiques, qui manifestent immédiatement que les quantités $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{k'}$ sont des fonctions uniformes de ω. Il suffit en effet de poser $x = 0$ dans les deux dernières équations du premier groupe pour obtenir

$$
\sqrt[4]{k} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{2}} \frac{\eta_1\left(0,\ \frac{\omega+1}{2}\right)}{\theta(0,\ 2\omega)} = \frac{\sqrt{2}\sqrt[8]{q}\sum(-1)^n q^{2n^2+n}}{\sum(-1)^n q^{2n^2}},
$$

$$
\sqrt[4]{k'} = e^{-\frac{i\pi}{8}} \frac{\eta_1\left(0,\ \frac{\omega+1}{2}\right)}{\eta_1\left(0,\ \frac{\omega}{2}\right)} = \frac{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}}{\sum q^{2n^2+n}},
$$

c'est-à-dire deux des formules rapportées plus haut d'après Jacobi, et dont les autres se tirent aisément, comme nous le verrons bientôt. Quant aux équations du second groupe, elles donneraient, en prenant le rapport des dérivées, deux termes pour $x = 0$,

$$
\sqrt[4]{k^3} = \frac{\sqrt{8}\sqrt[8]{q^3}\sum(4n+1)q^{8n^2+4n}}{\sum(4n+1)(-1)^n q^{2n^2+n}},
$$

$$
\sqrt[4]{k'^3} = \frac{\sum(4n+1)q^{2n^2+n}}{\sum(4n+1)(-1)^n q^{2n^2+n}},
$$

les signes $\sum$ s'étendant, comme précédemment, aux valeurs positives et négatives de n.

Mais ces nouveaux développements n'ont pas seulement pour objet de conduire à ces conséquences, que je devais donner principalement en vue de l'étude des quantités $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{k'}$; j'en indiquerai encore un usage dans la question suivante :

II. La dérivée de $\sin \operatorname{am} x$ étant exprimée par

$$\sqrt{(1 - \sin^2 \operatorname{am} x)(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} x)},$$

il est naturel de se demander si les combinaisons suivantes des facteurs du radical

$$\begin{aligned}
\lambda\,(x, k) &= \sqrt{(1 + \sin \operatorname{am} x)(1 + k \sin \operatorname{am} x)},\\
\lambda_1(x, k) &= \sqrt{(1 + \sin \operatorname{am} x)(1 - k \sin \operatorname{am} x)},
\end{aligned}$$

représenteront aussi bien que

$$\cos \operatorname{am} x = \sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{am} x} \quad \text{et} \quad \Delta \operatorname{am} x = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} x}$$

des fonctions uniformes de la variable. Or, en désignant par a une racine quelconque des équations $\lambda(x) = 0$, $\lambda_1(x) = 0$, on reconnaît aisément que les développements $\lambda(a + \varepsilon)$, $\lambda_1(a + \varepsilon)$ commencent par un terme proportionnel à ε, de sorte que d'après les principes connus [*] on peut assurer déjà que ces fonctions sont uniformes. On trouve en effet, par exemple,

$$\lambda(-\mathrm{K} + \varepsilon) = \sqrt{1 + k}\, \frac{\sqrt{1 - k \sin^2 \operatorname{am} \varepsilon} - \cos \operatorname{am} \varepsilon\, \Delta \operatorname{am} \varepsilon}{\Delta \operatorname{am} \varepsilon},$$

et la quantité sous le radical est une fonction paire de ε, qui s'annule avec cette variable. Mais il reste à trouver leur expression analytique, et on y parvient d'un manière facile comme il suit.

Changeons k en $\frac{1 - k'}{1 + k'}$ et x en $(1 + k')x$, en employant la formule

$$\sin \operatorname{am} \left[(1 + k')x, \frac{1 - k'}{1 + k'}\right] = \frac{(1 + k') \sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} x}{\Delta \operatorname{am} x},$$

---

[*] *Voyez* l'ouvrage de MM. Briot et Bouquet sur les fonctions doublement périodiques.

on trouvera

$$\lambda\left[(1+k')x, \frac{1-k'}{1+k'}\right]$$
$$= \frac{1}{\Delta \operatorname{am} x}\sqrt{1-k^2\sin^4\operatorname{am}x + 2\sin\operatorname{am}x\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x},$$
$$\lambda_1\left[(1+k')x, \frac{1-k'}{1+k'}\right]$$
$$= \frac{1}{\Delta \operatorname{am} x}\sqrt{1-2k^2\sin^2\operatorname{am}x + k^2\sin^4\operatorname{am}x + 2k'\sin\operatorname{am}x\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x}.$$

Or il arrive que les quantités sous les deux radicaux sont des carrés parfaits, à savoir :

$$(\cos\operatorname{am}x + \sin\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x)^2 \quad \text{et} \quad (k'\sin\operatorname{am}x + \cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x)^2$$

de sorte qu'il vient simplement

$$\lambda\left[(1+k')x, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \sin\operatorname{am}x + \frac{\cos\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x} = \sin\operatorname{am}x + \sin\operatorname{coam}x,$$
$$\lambda_1\left[(1+k')x, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \cos\operatorname{am}x + \frac{k'\sin\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x} = \cos\operatorname{am}x + \cos\operatorname{coam}x.$$

Posons encore avec Jacobi $k^{(2)} = \frac{1-k'}{1+k'}$, $K^{(2)} = \frac{1+k'}{2}K$, ces quantités désignant ce que deviennent k et K par le changement de q en q^2 ou de ω en 2ω, et mettons $\frac{2Kx}{\pi}$ au lieu de x : on aura

$$\lambda\left[\frac{4K^{(2)}x}{\pi}, k^{(2)}\right] = \sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} + \sin\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi},$$
$$\lambda_1\left[\frac{4K^{(2)}x}{\pi}, k^{(2)}\right] = \cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} + \cos\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}.$$

C'est à ce moment que nous ferons remarquer l'avantage des nouvelles formules

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{k}}\cdot\frac{\eta\left(x, \frac{\omega+1}{2}\right)}{\theta(2x, 2\omega)}, \quad \cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{k'}{k'}}\cdot\frac{\eta_1\left(x, \frac{\omega}{2}\right)}{\theta(2x, 2\omega)},$$

car elles donnent, avec le même dénominateur,

$$\sin\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{k}}\cdot\frac{\eta_1\left(x, \frac{\omega+1}{2}\right)}{\theta(2x, 2\omega)}, \quad \cos\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{\eta\left(x, \frac{\omega}{2}\right)}{\theta(2x, 2\omega)},$$

de sorte qu'ayant, comme on le vérifie de suite,

$$\eta\left(x,\frac{\omega+1}{2}\right)+\eta_1\left(x,\frac{\omega+1}{2}\right)=\sqrt{2}.e^{\frac{i\pi}{8}}\eta_1\left(x-\frac{\pi}{4},\ \frac{\omega}{2}\right),$$

$$\eta\left(x,\ \frac{\omega}{2}\right)+\eta_1\left(x,\ \frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{2}.e^{-\frac{i\pi}{8}}\eta_1\left(x-\frac{\pi}{4},\frac{\omega+1}{2}\right),$$

on en conclut, en remplaçant x et ω par $\frac{x}{2}$ et $\frac{\omega}{2}$,

$$\lambda\left(\frac{2Kx}{\pi},k\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{k_{\frac{1}{2}}}}\frac{\eta_1\left(\frac{2x-\pi}{4},\frac{\omega}{4}\right)}{\theta(x,\omega)}=\frac{1}{\sqrt[4]{k_{\frac{1}{2}}}}\frac{2\sqrt[16]{q}\sum q^{\frac{2n^2+n}{2}}\cos(4n+1)\left(\frac{2x-\pi}{4}\right)}{\sum(-1)^n q^{n^2}\cos 2nx},$$

$$\lambda_1\left(\frac{2Kx}{\pi},k\right)=e^{-\frac{i\pi}{8}}\sqrt[4]{\frac{k'_{\frac{1}{2}}}{k_{\frac{1}{2}}}}\frac{\eta_1\left(\frac{2x-\pi}{4},\frac{\omega+2}{4}\right)}{\theta(x,\omega)}$$

$$=\sqrt[4]{\frac{k'_{\frac{1}{2}}}{k_{\frac{1}{2}}}}\frac{2\sqrt[16]{q}\sum(-1)^n q^{\frac{2n^2+n}{2}}\cos(4n+1)\left(\frac{2x-\pi}{4}\right)}{\sum(-1)^n q^{n^2}\cos 2nx}.$$

Dans ces formules, $k_{\frac{1}{2}}$ et $k'_{\frac{1}{2}}$ désignent ce que deviennent le module et son complément par le changement de ω en $\frac{\omega}{2}$, et ont pour valeur

$$k_{\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{k}}{1+k},\quad k'_{\frac{1}{2}}=\frac{1-k}{1+k}.$$

Sous forme de séries simples, on aurait

$$\lambda\left(\frac{2Kx}{\pi}+K,k\right)=\frac{\pi\sqrt{2}\sqrt[4]{q}}{K\sqrt{k}}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\frac{q^n\cos(4n+1)x}{1-q^{2n+\frac{1}{2}}},$$

$$\lambda_1\left(\frac{2Kx}{\pi}+K,k\right)=\frac{\pi\sqrt{2}\sqrt[4]{q}}{K\sqrt{k}}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\frac{q^n\cos(4n+1)x}{1+q^{2n+\frac{1}{2}}}.$$