JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 299-312.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__299_0>

SUR LA FORME

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Jacobi a prouvé le premier que tout entier n peut être représenté par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2,$$

et depuis j'ai fait voir que ce théorème n'est qu'une conséquence presque immédiate de celui que Lagrange a établi rigoureusement dans les Mémoires de l'Académie de Berlin au sujet de la représentation de n par une somme de quatre carrés. Il est en outre aisé de s'assurer qu'en modifiant très-légèrement la méthode que Lagrange a suivie pour la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

on étend cette méthode à d'autres formes, parmi lesquelles se trouve la forme indiquée

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2.$$

Mais jusqu'à présent, à ma connaissance du moins, personne n'a donné une expression simple du nombre

$$\mathrm{N}(n = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2,$$

dans le second membre de laquelle nous admettons, comme d'ordinaire, pour x, y, z, t des entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs. En essayant aujourd'hui d'aborder cette question, je dois avertir que je n'ai réussi à la traiter complétement que dans le cas de n pair. Quand il s'agit d'un entier impair, je n'ai pu jusqu'ici trouver que deux limites (l'une inférieure, l'autre supérieure) du nombre demandé.

2. Considérons d'abord un entier n impairement pair, et pour mettre en évidence le facteur 3, s'il y est contenu, représentons cet entier par

$$2.3^\beta m,$$

m étant impair, premier à 3, et l'exposant β pouvant se réduire à zéro. Désignons d'ailleurs, suivant notre habitude, par

$$\zeta_1(m)$$

la somme des diviseurs de m. La valeur demandée de

$$\mathrm{N}\,(2.3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

s'obtiendra en multipliant

$$\zeta_1(m)$$

par le facteur

$$2\,(3^{\beta+1} - 2)$$

qui dépend de β.

Ainsi

$$(1)\quad \mathrm{N}\,(2.3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2\,(3^{\beta+1} - 2)\,\zeta_1(m).$$

On remarquera, en passant, que le rapport de

$$\mathrm{N}\,(2.3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

à

$$\mathrm{N}\,(2m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

est celui de

$$3^{\beta+1} - 2$$

à l'unité.

3. Appliquons la formule

$$(1) \quad N(2.3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2(3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m)$$

à quelques exemples.

En y prenant $\beta = 0$, avec $m = 1$, elle donne

$$N(2 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2,$$

résultat confirmé par l'identité

$$2 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6.0^2.$$

Pour $\beta = 0$, avec $m = 5$, elle donne

$$N(10 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 12.$$

Or il y a en effet douze représentations de l'entier 10 par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2,$$

comme le prouvent les deux identités

$$10 = (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2$$

et

$$10 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 6(\pm 1)^2.$$

Pour $\beta = 0$, avec $m = 7$, il vient

$$N(14 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 16.$$

Or les identités

$$14 = (\pm 3)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,$$
$$14 = 0^2 + 2(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2,$$
$$14 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 2)^2 + 6.0^2$$

montrent l'exactitude de ce résultat. La première fournit huit représentations de l'entier 4; chacune des deux autres en fournit quatre, et

$$8 + 2.4 = 16.$$

Soit à présent $\beta = 1$, avec $m = 1$. La formule (1) nous donnera

$$N(6 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 14.$$

Les identités qui fournissent les représentations sont ici :

$$\begin{aligned}
6 &= (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6.0^2,\\
6 &= (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,\\
6 &= 0^2 + 2.0^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2.
\end{aligned}$$

Elles conduisent au nombre indiqué, attendu que

$$4 + 8 + 2 = 14.$$

Pour dernier exemple, soit $\beta = 2$, avec $m = 1$. D'après la formule (1), on devra avoir

$$N(18 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 50.$$

La vérification se tire cette fois des identités

$$\begin{aligned}
18 &= 0^2 + 2(\pm 3)^2 + 3.0^2 + 6.0^2,\\
18 &= (\pm 4)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6.0^2,\\
18 &= (\pm 2)^2 + 2(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2,\\
18 &= (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 6(\pm 1)^2,\\
18 &= (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6(\pm 1)^2,\\
18 &= (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 2)^2 + 6.0^2,\\
18 &= 0^2 + 2.0^2 + 3(\pm 2)^2 + 6(\pm 1)^2.
\end{aligned}$$

Les nombres de représentations qui leur correspondent respectivement sont deux, quatre, huit, huit, seize, huit, quatre; et la somme

$$2 + 4 + 8 + 8 + 16 + 8 + 4$$

est précisément égale à 50.

4. Considérons maintenant un nombre pairement pair

$$2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant comme ci-dessus un entier impair, premier à 3, et l'exposant β pouvant se réduire à zéro, mais l'exposant α étant supérieur à l'unité. Dans cette hypothèse de

$$\alpha > 1,$$

je trouve

$$(2)\quad \mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 6(3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m).$$

Le facteur 2 de la formule (1) est remplacé, comme on voit, par le facteur 6. Il n'y a pas d'autre changement, et l'on doit observer que le rapport de

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

à

$$\mathrm{N}(2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

reste égal à celui de

$$3^{\beta+1} - 2$$

à l'unité, comme lorsqu'on prenait $\alpha = 1$. Ainsi, q désignant un entier *pair* et premier à 3, du reste quelconque, on obtient toujours la valeur de

$$\mathrm{N}(3^\beta q = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

en multipliant par

$$3^{\beta+1} - 2$$

celle de

$$\mathrm{N}(q = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2).$$

On verra plus tard comment cette relation se modifie quand il s'agit d'un nombre impair.

5. Vérifions la formule

$$(2)\quad \mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 6(3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m)$$

dans quelques cas particuliers, en supposant bien entendu $\alpha > 1$.

Pour $\alpha = 2$, avec $\beta = 0$ et $m = 1$, cette formule donne

$$N(4 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 6,$$

résultat confirmé par les deux identités

$$4 = (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 3.0^2 + 6.0^2$$

et

$$4 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2.$$

Pour $\alpha = 2$, avec $\beta = 1$ et $m = 1$, il vient

$$N(12 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 42.$$

Or les représentations de l'entier 12 par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2$$

sont contenues dans les identités

$$\begin{aligned}
12 &= (\pm 2)^2 + 2(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 6.0^2,\\
12 &= (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,\\
12 &= (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,\\
12 &= (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2,\\
12 &= (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6(\pm 1)^2,\\
12 &= 0^2 + 2.0^2 + 3(\pm 2)^2 + 6.0^2,
\end{aligned}$$

qui fournissent respectivement quatre, quatre, huit, huit, seize et deux représentations; la somme

$$4 + 4 + 8 + 8 + 16 + 2$$

étant égale à 42, la vérification cherchée a lieu.

Je terminerai en prenant $\alpha = 3$, avec $\beta = 0$ et $m = 1$. D'après la formule (2), on devra alors avoir

$$N(8 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 6;$$

et c'est ce qui résulte effectivement des deux identités

$$8 = 0^2 + 2(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 6.0^2$$

et

$$8 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2,$$

les seules qui puissent s'offrir ici.

6. Occupons-nous enfin du cas d'un nombre impair $3^\beta m$ (m impair et premier à 3). Je n'ai réussi, jusqu'à présent, comme je l'ai déjà dit, qu'à trouver pour

$$N(3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

deux limites, l'une inférieure, l'autre supérieure. Ces limites, telles qu'elles se présentent d'abord, seraient d'une part

$$\frac{2}{3}(3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m),$$

d'autre part

$$2(3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m).$$

Mais en s'en tenant là, on ne donnerait qu'une idée par trop insuffisante de ce que devient la valeur de

$$N(3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

quand l'exposant β grandit. Si nous n'avons pu mieux faire au sujet de la valeur de

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2),$$

pour laquelle la limite inférieure est

$$\frac{2}{3}\zeta_1(m)$$

et la limite supérieure

$$2\zeta_1(m),$$

nous montrerons du moins comment on passe de la valeur de

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

supposée connue à celle de

$$N\,(3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2).$$

De cette façon, l'influence de l'exposant β sera mise en pleine évidence.

7. Cherchons pour quelques nombres particuliers la valeur de

$$N\,(m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

dont nous venons de fixer la limite inférieure à

$$\frac{2}{3}\zeta_1(m)$$

et la limite supérieure à

$$2\zeta_1(m).$$

L'identité

$$1 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 3.0^2 + 6.0^2$$

nous montre que

$$N\,(1 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2.$$

Ici la limite supérieure est atteinte, puisque

$$2\zeta_1(1) = 2.$$

Au contraire, on conclut de l'identité

$$5 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,$$

de laquelle seule résultent les représentations de l'entier 5 par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2,$$

que

$$N\,(5 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 4.$$

Cette fois on descend jusqu'à la limite inférieure, puisque

$$\frac{2}{3}\zeta_1(5) = 4.$$

Des deux identités

$$7 = (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,$$
$$7 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2,$$

on conclut

$$N(7 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 8.$$

Ici on a

$$2\zeta_1(m) = 16, \quad \frac{2}{3}\zeta_1(m) = \frac{16}{3};$$

le nombre 8 est compris entre ces deux limites.

Soit, comme dernier exemple,

$$m = 11.$$

A cause des identités

$$11 = (\pm 3)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6.0^2,$$
$$11 = 0^2 + 2(\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,$$
$$11 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6(\pm 1)^2,$$

on a

$$N(11 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 16.$$

Or le nombre 16 est compris entre les limites 24 et 8, qu'indiquent les équations

$$2\zeta_1(11) = 24, \quad \frac{2}{3}\zeta_1(11) = 8.$$

8. Pour lier maintenant la valeur de

$$N(3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2),$$

où l'on suppose l'entier m impair et premier à 3, à celle de

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2),$$

la valeur de m étant la même, je mets en évidence la seule variable de la question, savoir β, et j'écris

$$N(3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = f(\beta),$$

en sorte que

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = f(0).$$

Cela posé, je trouve d'abord, entre $f(\beta)$ et $f(\beta+1)$, cette relation :

$$f(\beta+1) + f(\beta) = 4(3^{\beta+1} - 1)\zeta_1(m).$$

C'est une équation aux différences finies, très-facile à intégrer, et qui fournira $f(\beta)$, si l'on connaît $f(0)$. On en tire, en effet,

$$f(\beta) = (3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m) + (-1)^\beta[f(0) - \zeta_1(m)],$$

formule remarquable d'où résulte la solution complète du problème que nous avions en vue. Les principes sur lesquels nous nous fondons pour y arriver sont extrêmement simples et d'une grande portée.

9. Nous avons trouvé

$$N(1 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2,$$

en sorte que, pour $m = 1$, l'on a

$$f(0) = 2.$$

La valeur générale de $f(\beta)$, pour $m = 1$, sera donc

$$f(\beta) = 3^{\beta+1} - 2 + (-1)^\beta.$$

En d'autres termes,

$$N(3^\beta = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 3^{\beta+1} - 2 + (-1)^\beta.$$

Quand on distingue le cas de β pair du cas de β impair, on a par conséquent

$$N(3^{2\gamma} = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 3^{2\gamma+1} - 1,$$

tandis que

$$N(3^{2\gamma+1} = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 3(3^{2\gamma+1} - 1),$$

valeur triple de la précédente si γ est le même de part et d'autre. Quant aux exemples numériques, je me contenterai d'observer que, d'après nos formules, on doit avoir

$$N(3 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 6$$

et

$$N(9 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 26;$$

or ces deux résultats sont confirmés par les deux groupes d'identités que voici :

$$3 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6.0^2,$$
$$3 = 0^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2$$

et

$$9 = (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 3.0^2 + 6.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 6.0^2,$$
$$9 = (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2,$$
$$9 = 0^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 6(\pm 1)^2.$$

Nous avons trouvé

$$N(5 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 4,$$

en sorte que, pour $m = 5$, on a

$$f(0) = 4.$$

La valeur générale de $f(\beta)$, pour $m = 5$, sera donc

$$f(\beta) = 6(3^{\beta+1} - 2) - 2(-1)^\beta.$$

En d'autres termes,

$$N(3^\beta.5 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 6(3^{\beta+1} - 2) - 2(-1)^\beta.$$

Quand on distingue le cas de β pair du cas de β impair, on a par conséquent

$$N(3^{2\gamma}.5 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2(3^{2\gamma+2} - 7),$$

tandis que

$$N(3^{2\gamma+1}.5 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2(3^{2\gamma+3} - 5).$$

Cette dernière formule donne, par exemple,

$$N(15 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 44.$$

Or les identités

$$\begin{aligned}
15 &= (\pm 2)^2 + 2(\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,\\
15 &= (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2,\\
15 &= (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2,\\
15 &= (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6(\pm 1)^2,\\
15 &= (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 2)^2 + 6.0^2
\end{aligned}$$

fournissent effectivement, pour l'entier 15, quarante-quatre représentations par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2,$$

attendu que

$$8 + 4 + 8 + 16 + 8 = 44.$$

Nous avons trouvé

$$N(7 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 8,$$

en sorte que, pour $m = 7$, on a $f(0) = 8$. La valeur générale de $f(\beta)$, pour $m = 7$, sera donc

$$f(\beta) = 8(3^{\beta+1} - 2).$$

En d'autres termes,

$$N(3^{\beta}.7 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 8(3^{\beta+1} - 2).$$

On a, par exemple,

$$N(21 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 56.$$

Ce résultat est confirmé par les identités

$$\begin{aligned}
21 &= 0^2 + 2(\pm 3)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,\\
21 &= (\pm 4)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,\\
21 &= (\pm 2)^2 + 2(\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6(\pm 1)^2,\\
21 &= (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 3(\pm 2)^2 + 6.0^2,\\
21 &= (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 3(\pm 2)^2 + 6.0^2,\\
21 &= (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 2)^2 + 6(\pm 1)^2,
\end{aligned}$$

attendu que

$$4 + 8 + 16 + 4 + 8 + 16 = 56.$$

Enfin, nous avons trouvé

$$N(11 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 16,$$

en sorte que, pour $m = 11$, on a $f(0) = 16$. La valeur générale de $f(\beta)$, pour $m = 11$, sera donc

$$f(\beta) = 12(3^{\beta+1} - 2) + 4(-1)^\beta.$$

Je ne pousserai pas plus loin ces détails.

10. En parlant des nombres pairs, nous avons vu que sous la seule condition de $\alpha > 0$, le rapport de

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

à

$$N(2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

est égal à celui de $3^{\beta+1} - 2$ à l'unité. L'équation

$$f(\beta) = (3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m) + (-1)^\beta[f(0) - \zeta_1(m)]$$

montre que ce rapport n'est plus celui de $f(\beta)$ à $f(0)$, c'est-à-dire de

$$N(3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

à

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2),$$

sauf pourtant si l'entier m est tel que l'on ait

$$f(0) = \zeta_1(m),$$

ce qui arrive pour $m = 7$, mais non pas pour $m = 1$, $m = 5$, $m = 11$. Quand la valeur de $f(0)$ n'est pas égale à $\zeta_1(m)$, le terme

$$(-1)^\beta [f(0) - \zeta_1(m)],$$

dont la valeur numérique est constante, introduit une sorte d'irrégularité tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre, suivant que l'exposant β est pair ou impair. Pour calculer ce terme exactement, il faudrait avoir la valeur exacte de $f(0)$. On peut cependant se faire une idée approchée du rôle qu'il joue à côté du terme

$$(3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m),$$

dont la valeur croît très-rapidement avec l'exposant β. En effet les limites de $f(0)$ étant

$$2\zeta_1(m), \quad \frac{2}{3}\zeta_1(m),$$

celles de

$$f(0) - \zeta_1(m)$$

sont

$$\zeta_1(m), \quad -\frac{1}{3}\zeta_1(m).$$

De là, pour $f(\beta)$, deux limites bien plus précises que celles du n° **6**.