JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Extrait d'une lettre adressée à M. Besge

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 9 (1864), p. 296-298.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__296_0>

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. BESGE;

PAR M. J. LIOUVILLE.

« . . . J'ai donné dans le temps une expression très-simple du nombre des représentations du double d'un entier impair m sous la forme d'une somme de douze carrés. En désignant, pour abréger, ce nombre par

$$N(2m),$$

on a

$$N(2m) = 264\zeta_5(m);$$

je représente à mon ordinaire par $\zeta_5(m)$ la somme des cinquièmes puissances des diviseurs de m. Le coefficient numérique 264 est naturellement égal à $N(2)$. Et en effet les représentations de l'entier 2 par une somme de douze carrés sont toutes fournies par l'identité

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2,$$

en y opérant les permutations convenables; leur nombre est donc égal à

$$4 \cdot \frac{11 \cdot 12}{2},$$

ce qui fait précisément 264.

» La formule générale pour le cas d'un entier pair quelconque

$$2^\alpha m$$

n'est guère plus compliquée. Je trouve en effet que sous la seule condition de $\alpha > 0$, l'on a

$$N(2^\alpha m) = \frac{24}{31}(21 + 2^{5\alpha+1} \cdot 5)\zeta_5(m),$$

ce qui pour $\alpha = 1$ reproduit la formule ci-dessus.

» Pour $\alpha = 2$, le facteur qui multiplie

$$\zeta_5(m)$$

devient

$$\frac{24}{31}(21 + 2^{11}.5);$$

or on a

$$21 + 2^{11}.5 = 31 + 10(2^{10} - 1)$$

et

$$2^{10} - 1 = (2^5 - 1)(2^5 + 1) = 31.33.$$

Donc

$$N(4m) = 24.331.\zeta_5(m).$$

» Ainsi, en particulier,

$$N(4) = 24.331.$$

Ce résultat est exact. Les représentations de l'entier 4 sous la forme d'une somme de douze carrés sont effectivement fournies par les deux identités

$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$$

et

$$\begin{aligned} 4 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 \\ + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2, \end{aligned}$$

en y effectuant les permutations qu'elles comportent. Pour la première, le nombre des représentations est égal à 24; pour la seconde, il s'exprime par

$$16 \cdot \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4},$$

c'est-à-dire par

$$24.330.$$

De là, pour le total, 24.331; c'est ce qu'a donné notre formule.

» Pour $\alpha = 3$, vous trouverez sans peine

$$N(8m) = 24.10571.\zeta_5(m);$$

et ainsi de suite. Mais laissons là ces détails.

» La formule générale

$$N(2^\alpha m) = \frac{24}{31}(21 + 2^{5\alpha+1}.5)\,\zeta_5(m),$$

qui subsiste à partir de $\alpha = 1$, vous paraîtra sans doute assez remarquable. Mais le cas de $\alpha = 0$ reste exclu, et il semble toujours difficile d'obtenir quelque chose d'entièrement satisfaisant au sujet de la valeur de $N(m)$. »