JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HERMITE

Remarque sur le développement de $\cos \mathrm{am} x$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 289-295.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__289_0>

REMARQUE
SUR LE DÉVELOPPEMENT DE $\cos \operatorname{am} x$;

PAR M. HERMITE.

En développant suivant les puissances de l'argument les trois fonctions $\sin \operatorname{am} x$, $\cos \operatorname{am} x$, $\Delta \operatorname{am} x$, on obtient les séries suivantes :

$$\sin \operatorname{am} x = x - (1+k^2)\frac{x^3}{1.2.3} + (1+14k^2+k^4)\frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$\cos \operatorname{am} x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + (1+4k^2)\frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$\Delta \operatorname{am} x = 1 - k^2\frac{x^2}{1.2} + (k^4+4k^2)\frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

où le coefficient d'un terme quelconque, $\frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots 2n+1}$, $\frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}$, est une fonction entière et à coefficients entiers du module k^2. Mais jusqu'ici il n'a pas été possible d'en obtenir l'expression générale, et tout ce que l'on sait à leur égard résulte simplement des relations

$$\sin \operatorname{am}\left(kx, \frac{1}{k}\right) = k \sin \operatorname{am}(x, k), \quad \cos \operatorname{am}\left(kx, \frac{1}{k}\right) = \Delta \operatorname{am}(x, k).$$

On reconnaît ainsi que les coefficients de $\sin \operatorname{am} x$ sont des polynômes réciproques, et que le développement de $\cos \operatorname{am} x$ donne immédiatement celui de $\Delta \operatorname{am} x$. C'est de cette fonction, $\cos \operatorname{am} x$, que je vais m'occuper en ce moment, me proposant d'établir à l'égard des coefficients, dont voici les premiers d'après Gudermann :

$$\begin{aligned}
&1+4k^2,\\
&1+44k^2+16k^4,\\
&1+408k^2+912k^4+64k^6,\\
&1+3688k^2+30768k^4+15808k^6+256k^8,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

la remarque suivante.

Posons $k = \cos\theta$ et introduisons les arcs multiples, au lieu des puissances du cosinus; en les multipliant chacun par k on trouvera successivement

$$k + 4k^3 = 4\cos\theta + \cos 3\theta,$$
$$k + 44k^3 + 16k^5 = 44\cos\theta + 16\cos 3\theta + \cos 5\theta,$$
$$k + 408k^3 + 912k^5 + 64k^7 = 912\cos\theta + 408\cos 3\theta + 64\cos 5\theta + \cos 7\theta,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On aperçoit dans ces égalités que les puissances de k et les cosinus des multiples de θ ont précisément les mêmes coefficients. Or, en général, si l'on représente le coefficient de $\frac{x^{2n+2}}{1.2.3\ldots 2n+2}$ dans le développement de $\cos \operatorname{am} x$ par

$$A_0 + A_1 k^2 + A_2 k^4 + \ldots + A_n k^{2n} = \sum_{i}^{n}{}_{0} A_i k^{2i},$$

on aura cette relation :

$$\sum A_i \cos^{2i+1}\theta = \sum A_i \cos(2n + 1 - 4i)\theta,$$

qu'on peut facilement démontrer, comme on verra. Mais je veux d'abord faire voir par un exemple comment elle sert à calculer directement les nombres entiers A_0, A_1, A_2, etc.

Soit $n = 4$: en faisant, pour simplifier, $A_i = 4^i a_i$, et posant $A_0 = 1$, on trouvera, en remplaçant par les arcs multiples les puissances du cosinus :

$$\cos\theta + 4a_1\cos^3\theta + 16a_2\cos^5\theta + 64a_3\cos^7\theta + 256a_4\cos^9\theta$$
$$= \cos\theta + a_1(\cos 3\theta + 3\cos\theta) + a_2(\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta)$$
$$+ a_3(\cos 7\theta + 7\cos 5\theta + 21\cos 3\theta + 35\cos\theta)$$
$$+ a_4(\cos 9\theta + 9\cos 7\theta + 36\cos 5\theta + 84\cos 3\theta + 126\cos\theta).$$

On en conclut, entre les quatre inconnues, les cinq équations que voici :

$$1 = a_4,$$
$$4a_1 = a_2 + 7a_3 + 36a_4,$$

$$16a_2 = 1 + 3a_1 + 10a_2 + 35a_3 + 126a_4,$$
$$64a_3 = a_1 + 5a_2 + 21a_3 + 84a_4,$$
$$256a_4 = a_3 + 9a_4.$$

Leur somme conduisant à une identité, on peut omettre l'une d'elles, et si l'on exclut la troisième, un calcul facile donne :

$$a_1 = 922, \quad a_2 = 1923, \quad a_3 = 247, \quad a_4 = 1,$$

ce qui conduit en effet au coefficient rapporté plus haut, d'après Gudermann. Laissant de côté l'étude de ces équations considérées en général, et me bornant à remarquer les valeurs

$$A_n = 4^n,$$
$$A_{n-1} = 4^{2n-1} - (2n+1)4^{n-1},$$
$$A_1 = \frac{9^{n+1} - 9 - 8n}{16},$$

j'arrive à la démonstration de l'égalité

$$\sum A_i \cos^{2i+1}\theta = \sum A_i \cos(2n+1-4i)\theta,$$

et à cette occasion, comme j'aurai à faire usage de la transformation du second ordre, je vais donner diverses formules qui s'y rapportent, et qui peuvent être utiles dans bien d'autres circonstances.

La principale, celle dont toutes les autres peuvent être tirées, est

$$\sin\operatorname{am}\left[(1+k)x, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \frac{(1+k)\sin\operatorname{am} x}{1 + k\sin^2\operatorname{am} x}.$$

Il suffit pour cela d'opérer tour à tour sur les fonctions au module primitif k, et au module transformé, en employant les relations de la transformation du premier ordre; on le démontre en partant de ce théorème arithmétique que tous les systèmes linéaires

$$\begin{Bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{Bmatrix},$$

dans lesquels $ad - bc$ est un nombre premier p, sont donnés par un seul d'entre eux

$$\begin{Bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & p \end{Bmatrix}$$

en le composant à droite et à gauche avec des systèmes $\begin{Bmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{Bmatrix}$ au déterminant 1. Or l'ensemble des relations relatives à la transformation du premier ordre consiste dans ces formules, savoir :

$$\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}\left(kx, \frac{1}{k}\right) &= k\sin\operatorname{am}x,\\
\cos\operatorname{am}\left(kx, \frac{1}{k}\right) &= \Delta\operatorname{am}x,\\
\Delta\operatorname{am}\left(kx, \frac{1}{k}\right) &= \cos\operatorname{am}x.
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}(ix, k') &= \frac{i\sin\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x},\\
\cos\operatorname{am}(ix, k') &= \frac{1}{\cos\operatorname{am}x},\\
\Delta\operatorname{am}(ix, k') &= \frac{\Delta\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x}.
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}\left(ik'x, \frac{1}{k'}\right) &= \frac{ik'\sin\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x},\\
\cos\operatorname{am}\left(ik'x, \frac{1}{k'}\right) &= \frac{\Delta\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x},\\
\Delta\operatorname{am}\left(ik'x, \frac{1}{k'}\right) &= \frac{1}{\cos\operatorname{am}x}.
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}\left(ikx, \frac{ik'}{k}\right) &= \frac{ik\sin\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x},\\
\cos\operatorname{am}\left(ikx, \frac{ik'}{k}\right) &= \frac{1}{\Delta\operatorname{am}x},\\
\Delta\operatorname{am}\left(ikx, \frac{ik'}{k}\right) &= \frac{\cos\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x}.
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}\left(k'x, \frac{ik}{k'}\right) &= \frac{k'\sin\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x},\\
\cos\operatorname{am}\left(k'x, \frac{ik}{k'}\right) &= \frac{\cos\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x},\\
\Delta\operatorname{am}\left(k'x, \frac{ik}{k'}\right) &= \frac{1}{\Delta\operatorname{am}x}.
\end{aligned}\right.$$

On en tire par un calcul facile, pour la transformation du second ordre, les formules suivantes :

$$\text{I.}\quad\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}\left[(1+k)x, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] &= \frac{(1+k)\sin\operatorname{am}x}{1+k\sin^2\operatorname{am}x},\\
\cos\operatorname{am}\left[(1+k)x, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] &= \frac{\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x}{1+k\sin^2\operatorname{am}x},\\
\Delta\operatorname{am}\left[(1+k)x, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] &= \frac{1-k\sin^2\operatorname{am}x}{1+k\sin^2\operatorname{am}x},
\end{aligned}\right.$$

$$\text{II.}\quad\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}\left[(1+k')ix, \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}\right] &= \frac{i(1+k')\sin\operatorname{am}x\cos\operatorname{am}x}{1-(1+k')\sin^2\operatorname{am}x},\\
\cos\operatorname{am}\left[(1+k')ix, \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}\right] &= \frac{\Delta\operatorname{am}x}{1-(1+k')\sin^2\operatorname{am}x},\\
\Delta\operatorname{am}\left[(1+k')ix, \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}\right] &= \frac{1-(1-k')\sin^2\operatorname{am}x}{1-(1+k')\sin^2\operatorname{am}x}.
\end{aligned}\right.$$

$$\text{III.}\quad\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}\left[(k'+ik)x, \frac{2\sqrt{ikk'}}{k'+ik}\right] &= \frac{(k'+ik)\sin\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x}{1-(k-ik')k\sin^2\operatorname{am}x},\\
\cos\operatorname{am}\left[(k'+ik)x, \frac{2\sqrt{ikk'}}{k'+ik}\right] &= \frac{\cos\operatorname{am}x}{1-(k-ik')k\sin^2\operatorname{am}x},\\
\Delta\operatorname{am}\left[(k'+ik)x, \frac{2\sqrt{ikk'}}{k'+ik}\right] &= \frac{1-(k+ik')k\sin^2\operatorname{am}x}{1-(k-ik')k\sin^2\operatorname{am}x}.
\end{aligned}\right.$$

$$\text{IV.}\quad\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}\left[(1+k)ix, \frac{1-k}{1+k}\right] &= \frac{i(1+k)\sin\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x};\\
\cos\operatorname{am}\left[(1+k)ix, \frac{1-k}{1+k}\right] &= \frac{1+k\sin^2\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x},\\
\Delta\operatorname{am}\left[(1+k)ix, \frac{1-k}{1+k}\right] &= \frac{1-k\sin^2\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x}.
\end{aligned}\right.$$

$$\text{V.}\quad\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}\left[(1+k')x, \frac{1-k'}{1+k'}\right] &= \frac{(1+k')\sin\operatorname{am}x\cos\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x},\\
\cos\operatorname{am}\left[(1+k')x, \frac{1-k'}{1+k'}\right] &= \frac{1-(1+k')\sin^2\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x},\\
\Delta\operatorname{am}\left[(1+k')x, \frac{1-k'}{1+k'}\right] &= \frac{1-(1-k')\sin^2\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x}.
\end{aligned}\right.$$

$$\text{VI.}\quad\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}\left[(k-ik')x,\ \frac{k+ik'}{k-ik'}\right] &= \frac{(k-ik')\sin\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x},\\
\cos\operatorname{am}\left[(k-ik')x,\ \frac{k+ik'}{k-ik'}\right] &= \frac{1-(k-ik')k\sin^2\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x},\\
\Delta\operatorname{am}\left[(k-ik')x,\ \frac{k+ik'}{k-ik'}\right] &= \frac{1-(k+ik')k\sin^2\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x}.
\end{aligned}\right.$$

J'omets d'écrire, pour abréger, toutes celles qui en résulteraient par le changement de signe de k ou k', et par le changement des modules transformés en leurs inverses, et ne conduiraient pas par conséquent à de nouvelles formes analytiques dans les seconds membres. C'est dans le dernier groupe que nous trouverons la relation conduisant à l'identité que nous voulons établir. En partant en effet de l'égalité

$$\cos\operatorname{am}\left[(k-ik')x,\ \frac{k+ik'}{k-ik'}\right] = \frac{1-(k-ik')k\sin^2\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x},$$

on en déduira, par le changement de signe de k',

$$\cos\operatorname{am}\left[(k+ik')x,\ \frac{k-ik'}{k+ik'}\right] = \frac{1-(k+ik')k\sin^2\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x},$$

d'où il sera facile de tirer

$$(k+ik')\cos\operatorname{am}\left[(k-ik')x,\ \frac{k+ik'}{k-ik'}\right]+(k-ik')\cos\operatorname{am}\left[(k+ik')x,\ \frac{k-ik'}{k+ik'}\right]$$
$$= 2k\cos\operatorname{am}x.$$

Or, en posant $k=\cos\theta$, cette égalité prendra cette forme

$$e^{i\theta}\cos\operatorname{am}\left(e^{-i\theta}x,\ e^{2i\theta}\right)+e^{-i\theta}\cos\operatorname{am}\left(e^{i\theta}x,\ e^{-2i\theta}\right) = 2\cos\theta\cos\operatorname{am}x,$$

et la relation que nous nous sommes proposé de démontrer en résulte évidemment, en comparant dans les deux membres les coefficients d'une même puissance de la variable.

Relativement à $\sin\operatorname{am}x$, ce serait une formule de la transformation du quatrième ordre qui donnerait une conséquence semblable. Partant en effet de la relation suivante

$$\sin\operatorname{am}\left[\frac{i(1+\sqrt{k})^2 x}{2}, \frac{(1-\sqrt{k})^2}{(1+\sqrt{k})^2}\right] = \frac{i}{(1-\sqrt{k})^2}\,\frac{1-k\sin^2\operatorname{am}x-\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x}{\sin\operatorname{am}x},$$

on en déduira aisément

$$\begin{aligned}&(1-\sqrt{-k})^2\sin\operatorname{am}\left[\frac{i(1+\sqrt{-k})^2 x}{2}, \frac{(1-\sqrt{-k})^2}{(1+\sqrt{-k})^2}\right]\\ &-(1-\sqrt{k})^2\sin\operatorname{am}\left[\frac{i(1+\sqrt{k})^2 x}{2}, \frac{(1-\sqrt{k})^2}{(1+\sqrt{k})^2}\right] = 2ik\sin\operatorname{am}x,\end{aligned}$$

et on en tirera, pour la détermination des coefficients du développement de $\sin\operatorname{am}x$, des relations analogues aux précédentes, mais d'une forme un peu moins simple.