JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; quatorzième article

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 281-288.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__281_0>

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

QUATORZIÈME ARTICLE.

1. Dans ce quatorzième article, comme dans le treizième (inséré au cahier précédent), je considère un nombre donné

$$m$$

de la forme $4\mu + 3$. Je le décompose d'abord de cette manière

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2m_3,$$

m_1, m_2, m_3 étant des entiers, savoir : m_1 impair, positif ou négatif; m_2 pair ou impair, positif, nul ou négatif; enfin m_3 impair et positif. Puis je fais

$$m_3 = d_3 \delta_3,$$

d_3 et δ_3 étant, comme m_3, des entiers impairs et positifs. J'arrive ainsi à l'équation

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\delta_3,$$

qui marque le mode de partition du nombre m auquel se rattachent nos formules.

De chaque système

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ \delta_3$$

ainsi obtenu, on tire trois autres quantités que je désignerai par

$$x,\ y,\ z,$$

en faisant cette fois

$$x = \delta_3 - 2m_2,$$
$$y = d_3 + 2m_2 - m_1,$$

avec

$$z = \delta_3 + m_1.$$

Ce sont là les valeurs que j'emploierai sous le signe F, en représentant par

$$F(x, y, z)$$

une fonction impaire de x, y, z, c'est-à-dire une fonction remplissant les trois conditions générales

$$F(-x, y, z) = -F(x, y, z),$$
$$F(x, -y, z) = -F(x, y, z),$$
$$F(x, y, -z) = -F(x, y, z),$$

à quoi j'ajoute les deux conditions spéciales

$$F(x, 0, z) = 0, \quad F(x, y, 0) = 0,$$

relativement aux indéterminées y, z dont les valeurs sont des entiers pairs comprenant le zéro. Quant à x, c'est un entier essentiellement impair; on n'a donc pas à se préoccuper du cas de $x = 0$, qui ne peut pas avoir lieu.

Considérant à présent pour chaque système

$$m_1, \; m_2, \; d_3, \; \delta_3,$$

la valeur correspondante

$$F(x, y, z),$$

ou plutôt

$$F(\delta_3 - 2m_2, \; d_3 + 2m_2 - m_1, \; \delta_3 + m_1),$$

de notre fonction, je trouve que cette valeur est tantôt positive, tantôt négative, de telle façon que la somme algébrique est nulle pour l'ensemble. C'est ce que j'exprime en disant que l'on a

$$\text{(B)} \qquad \sum F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ \delta_3 + m_1) = 0,$$

pourvu que le signe

$$\sum$$

porte sur tous les systèmes

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ \delta_3.$$

Nous nous contenterons des deux exemples de

$$m = 3, \quad m = 7.$$

Pour $m = 3$, on n'a à écrire que deux équations

$$3 = 1^2 + 4.0^2 + 2.1.1,$$
$$3 = (-1)^2 + 4.0^2 + 2.1.1,$$

d'où résulte, pour le premier membre de la formule (B), une somme formée aussi de deux termes

$$F(1, 0, 2) + F(1, 2, 0),$$

qui tous les deux sont nuls puisqu'une des indéterminées y est égale à zéro sous le signe F. Pour $m = 7$, l'équation

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\delta_3$$

fournit huit équations particulières :

$$7 = 1^2 + 4.0^2 + 2.1.3,$$
$$7 = 1^2 + 4.0^2 + 2.3.1,$$
$$7 = (-1)^2 + 4.0^2 + 2.1.3,$$
$$7 = (-1)^2 + 4.0^2 + 2.3.1,$$
$$7 = 1^2 + 4.1^2 + 2.1.1,$$
$$7 = 1^2 + 4(-1)^2 + 2.1.1,$$
$$7 = (-1)^2 + 4.1^2 + 2.1.1,$$
$$7 = (-1)^2 + 4(-1)^2 + 2.1.1.$$

La somme des valeurs correspondantes de

$$F(x, y, z)$$

est donc composée de huit termes

$$F(3, 0, 4) + F(1, 2, 2) + F(3, 2, 2) + F(1, 4, 0) + F(-1, 2, 2) \\ + F(3, -2, 2) + F(-1, 4, 0) + F(3, 0, 0).$$

Or quatre de ces termes sont nuls, puisqu'une des variables y est égale à zéro sous le signe F; et les quatre autres se détruisent deux à deux, puisque par la nature de la fonction F on a

$$F(-1, 2, 2) = -F(1, 2, 2)$$

et

$$F(3, -2, 2) = -F(3, 2, 2).$$

2. La formule

$$\text{(B)} \qquad \sum F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ \delta_3 + m_1) = 0$$

que nous venons de poser et la formule

$$\text{(A)} \qquad \sum F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1) = 0$$

de notre treizième article sont comprises dans une formule que nous allons maintenant faire connaître et qui contient une fonction de quatre variables.

C'est toujours un entier

$$m$$

de la forme

$$4\mu + 3$$

que nous considérons, en continuant à le soumettre au mode de partition marqué par l'équation

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\delta_3;$$

on se souvient que d_3 et δ_3 sont impairs et positifs, m_1 impair de signe quelconque, enfin m_2 pair ou impair, positif, nul ou négatif.

De chaque système

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ \delta_3,$$

on tire quatre quantités

$$x,\ y,\ z,\ t,$$

savoir :

$$\begin{aligned} x &= \delta_3 - 2m_2, \\ y &= d_3 + 2m_2 - m_1, \\ z &= d_3 + 2m_2 + m_1, \\ t &= \delta_3 + m_1. \end{aligned}$$

Telles seront ici les variables x, y, z, t à employer sous un signe de fonction :

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t).$$

Mais il faut définir cette fonction que nous voulons introduire et préciser les conditions auxquelles elle devra satisfaire.

D'abord, il faut qu'elle soit impaire par rapport à x et par rapport à y; en d'autres termes, il faut que si, x, y, z, t désignant un des systèmes de valeurs de nos variables, il y en a un autre pour lequel la première ou la seconde variable ait seulement changé de signe, la fonction elle-même n'ait fait aussi que changer de signe, en sorte que

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(-x, y, z, t) &= -\mathfrak{F}(x, y, z, t), \\ \mathfrak{F}(x, -y, z, t) &= -\mathfrak{F}(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Pour $y = 0$, nous ajouterons, comme à l'ordinaire, la condition spéciale

$$\mathfrak{F}(x, 0, z, t) = 0;$$

mais nous n'avons rien à exiger de la valeur de

$$\mathfrak{F}(0, y, z, t),$$

puisqu'on ne peut pas avoir $x = 0$.

Il faut ensuite (et ici je hasarde une locution nouvelle) que la fonction

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t)$$

soit impaire par rapport au groupe des deux variables z, t; je veux dire que si le système x, y, z, t coexiste avec un autre système x, y, $-z$, $-t$, où les deux dernières variables ont changé *à la fois* de signe, on devra avoir

$$\mathfrak{F}(x, y, -z, -t) = -\mathfrak{F}(x, y, z, t).$$

Si l'on a $z = 0$ sans avoir $t = 0$, ou bien $t = 0$ sans $z = 0$, cette équation de condition prendra la forme

$$\mathfrak{F}(x, y, 0, -t) = -\mathfrak{F}(x, y, 0, t),$$

ou bien la forme

$$\mathfrak{F}(x, y, -z, 0) = -\mathfrak{F}(x, y, z, 0).$$

Mais il faut prévoir aussi le cas où l'on aurait en même temps $z = 0$ et $t = 0$; alors nous demandons naturellement que

$$\mathfrak{F}(x, y, 0, 0) = 0.$$

Sous les conditions que je viens d'énumérer, on aura toujours

$$(\mathrm{C}) \sum \mathfrak{F}(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1,\ \delta_3 + m_1) = 0,$$

le signe

$$\sum$$

portant sur tous les systèmes

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ \delta_3.$$

Cette formule remarquable est l'objet principal de notre quatorzième article.

Nous nous bornerons à vérifier la formule (C) dans le cas de

$$m = 7.$$

Alors la somme qu'on doit trouver égale à zéro est la suivante :

$$\mathfrak{F}(3, 0, 2, 4) + \mathfrak{F}(1, 2, 4, 2) + \mathfrak{F}(3, 2, 0, 2) + \mathfrak{F}(1, 4, 2, 0)$$
$$+ \mathfrak{F}(-1, 2, 4, 2) + \mathfrak{F}(3, -2, 0, 2) + \mathfrak{F}(-1, 4, 2, 0) + \mathfrak{F}(3, 0, -2, 0).$$

Or les deux termes

$$\mathfrak{F}(3, 0, 2, 4), \quad \mathfrak{F}(3, 0, -2, 0)$$

sont égaux à zéro, puisque pour eux la valeur de y est égale à zéro. Les six autres se détruisent deux à deux, attendu que l'on doit avoir

$$\mathfrak{F}(-1, 2, 4, 2) = -\mathfrak{F}(1, 2, 4, 2), \quad \mathfrak{F}(-1, 4, 2, 0) = -\mathfrak{F}(1, 4, 2, 0),$$

d'après la condition relative au changement de signe pour la variable x; puis

$$\mathfrak{F}(3, -2, 0, 2) = -\mathfrak{F}(3, 2, 0, 2),$$

d'après la condition relative au changement de signe pour la variable y. L'équation (C) est donc vérifiée.

3. On s'assurera aisément que les conditions imposées à la fonction

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t)$$

dans la formule

$$\text{(C)} \quad \sum \mathfrak{F}(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1,\ \delta_3 + m_1) = 0$$

seront remplies si, en supposant cette fonction indépendante de t, on la réduit à une fonction impaire des trois autres variables, c'est-à-dire à une fonction

$$F(x, y, z)$$

vérifiant les équations générales

$$F(-x, y, z) = -F(x, y, z),$$
$$F(x, -y, z) = -F(x, y, z),$$
$$F(x, y, -z) = -F(x, y, z)$$

et les équations particulières

$$F(x, 0, z) = 0, \quad F(x, y, 0) = 0.$$

Alors la formule (C) se changera dans la formule (A).

Elle se changera au contraire dans la formule (B), si l'on suppose la fonction

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t)$$

indépendante de z et réduite à une fonction impaire de x, y, t dont la valeur soit zéro quand y ou $t = 0$.

D'autres formules à trois variables pourraient se déduire de la formule (C); mais je n'insiste pas sur ces détails.