JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 2\left(z^2 + t^2 + u^2 + v^2\right)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 273-280.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__273_0>

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2);$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Il s'agit de trouver une expression simple du nombre

$$N[n = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

des représentations d'un entier donné quelconque n par la forme à six variables

$$x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

c'est-à-dire du nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

dans laquelle x, y, z, t, u, v sont des entiers pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs.

En écrivant

$$n = 2^\alpha m,$$

m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro, on reconnaît que cette fois encore la réponse à la question proposée dépend surtout de la fonction numérique

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2,$$

ou

$$\sum \left(\frac{-1}{\delta}\right) d^2,$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$m = d\delta.$$

Nous continuerons à désigner cette fonction numérique par

$$\rho_2(m).$$

2. Supposons d'abord que l'on ait $\alpha = 0$, en sorte qu'on demande seulement

$$\mathrm{N}\,[m = x^2 + y^2 + 2\,(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)].$$

Nous trouvons à ce sujet l'équation très-simple que voici :

$$(1)\qquad \mathrm{N}\,[m = x^2 + y^2 + 2\,(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 4\rho_2(m).$$

Elle a lieu quelle que soit la valeur de m (mod. 4).

Au contraire, quand on s'occupe d'un entier $2^\alpha m$ pair, la valeur de m (mod. 4) a de l'influence. Dans l'hypothèse de $\alpha > 0$, on a en effet

$$(2)\quad \mathrm{N}\left[2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right] = 4\left[4^\alpha - \left(\frac{-1}{m}\right)\right]\rho_2(m).$$

Or le symbole

$$\left(\frac{-1}{m}\right)$$

qui figure dans l'équation (2) indique deux valeurs différentes, savoir 1 ou -1 suivant que m est de la forme $4l+1$ ou de la forme $4l+3$.

Observons en passant que la valeur de

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2\,(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right],$$

dans le cas d'un entier pair, pourrait être obtenue immédiatement en invoquant les résultats obtenus par Jacobi relativement à la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2.$$

Il est visible, en effet, que la valeur de

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2\,(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right],$$

α étant > 0, est égale à celle de

$$N\left(2^{\alpha-1}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2\right).$$

Cette dernière valeur étant connue, l'autre l'est donc.

Réciproquement, si l'on admet l'équation (2), il faudra en conclure, en posant $\alpha = \beta + 1$, que soit pour $\beta > 0$, soit même pour $\beta = 0$, on doit avoir

$$N\left(2^{\beta} m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2\right) = 4\left[4^{\beta+1} - \left(\frac{-1}{m}\right)\right]\rho_2(m),$$

et cela résulte en effet des séries elliptiques de Jacobi.

5. Appliquons la formule (1),

$$N\left[m = x^2 + y^2 + 2\left(z^2 + t^2 + u^2 + v^2\right)\right] = 4\rho_2(m),$$

à quelques exemples.

Cette formule donne d'abord

$$N\left[1 = x^2 + y^2 + 2\left(z^2 + t^2 + u^2 + v^2\right)\right] = 4,$$

résultat confirmé par les identités

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2\left(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2\right)$$

et

$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 2\left(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2\right),$$

qui donnent, pour l'entier 1, quatre représentations sous la forme

$$x^2 + y^2 + 2\left(z^2 + t^2 + u^2 + v^2\right).$$

Elle donne ensuite

$$N\left[3 = x^2 + y^2 + 2\left(z^2 + t^2 + u^2 + v^2\right)\right] = 32.$$

Or l'identité

$$3 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2\left[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2\right]$$

fournit en effet trente-deux représentations de l'entier 3, quand on y effectue les permutations qu'elle comporte.

On a encore

$$N(5 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2) = 104.$$

Or les deux identités

$$5 = 1^2 + 2^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2)$$

et

$$5 = 1^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2)$$

fournissent l'une huit et l'autre quatre-vingt-seize représentations de l'entier 5, en affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations voulues : le total est bien cent quatre.

Les identités

$$7 = 1^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2)$$

et

$$7 = 1^2 + 2^2 + 2(1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2)$$

servent de même à vérifier l'exactitude de l'équation

$$N[7 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 192.$$

La première fournit cent vingt-huit représentations de l'entier 7, la seconde en donne soixante-quatre; or

$$128 + 64 = 192.$$

Enfin, il vient

$$N[9 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 292.$$

Ici la vérification se tire des quatre identités

$$9 = 3^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$
$$9 = 2^2 + 1^2 + 2(1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2),$$
$$9 = 1^2 + 0^2 + 2(2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$
$$9 = 1^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2).$$

Les nombres de représentations qu'elles fournissent sont respectivement

$$4,\ 192,\ 32,\ 64;$$

le total est bien deux cent quatre-vingt-douze.

4. Vérifions maintenant la formule (2), relative au cas de $\alpha > 0$,

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right] = 4\left[4^\alpha - \left(\frac{-1}{m}\right)\right]\rho_2(m).$$

En y prenant $m = 1$, avec $\alpha = 2$, cette formule donne

$$\mathrm{N}\left[2 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right] = 12,$$

résultat confirmé par les identités

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2)$$

et

$$2 = 0^2 + 0^2 + 2\left[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2\right].$$

La première donne quatre représentations de l'entier 2; la seconde en fournit huit, en faisant occuper successivement à

$$(\pm 1)^2$$

les quatre places qui lui conviennent.

En prenant $m = 1$, avec $\alpha = 2$, on trouve ensuite

$$\mathrm{N}\left[4 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right] = 60.$$

Cela s'accorde avec les identités

$$\begin{aligned}
4 &= 2^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),\\
4 &= 1^2 + 1^2 + 2(1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),\\
4 &= 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2).
\end{aligned}$$

En affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations voulues, on tire de la première de ces identités quatre représentations pour l'entier 4, trente-deux de la seconde, vingt-quatre de la troisieme; or

$$4 + 32 + 24 = 60.$$

En continuant à prendre $m = 1$, mais avec $\alpha = 3$, on a

$$N[8 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 252.$$

Les identités à employer cette fois sont

$$\begin{aligned}
8 &= 2^2 + 2^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),\\
8 &= 2^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2),\\
8 &= 1^2 + 1^2 + 2(1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2),\\
8 &= 0^2 + 0^2 + 2(2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),\\
8 &= 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2).
\end{aligned}$$

Les nombres de représentations qu'elles fournissent respectivement, pour l'entier 8, sont

$$4,\ 96,\ 128,\ 8,\ 16;$$

or

$$4 + 96 + 128 + 8 + 16 = 252.$$

Soit enfin $m = 3$, avec $\alpha = 1$. Notre formule donnera

$$N[6 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 160.$$

Or des identités

$$\begin{aligned}
6 &= 2^2 + 0^2 + 2(1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),\\
6 &= 1^2 + 1^2 + 2(1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2),\\
6 &= 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2),
\end{aligned}$$

on tire respectivement trente-deux, quatre-vingt-seize et encore trente-deux représentations pour l'entier 6. Le total fait bien cent soixante.

5. Jusqu'ici nous n'avons parlé que du nombre total

$$N[n = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

des solutions, tant propres qu'impropres, de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2).$$

Occupons-nous maintenant du nombre

$$M[n = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

des solutions propres.

En posant toujours $n = 2^\alpha m$ (m impair), il faudra alors substituer à la fonction $\rho_2(m)$ une autre fonction $R_2(m)$ définie, au moyen des diviseurs premiers de l'entier m mis sous la forme

$$m = \prod (a^r),$$

par l'équation

$$R_2(m) = \prod \left[a^{2r} + \left(\frac{-1}{a}\right) a^{2r-2}\right].$$

On distinguera d'ailleurs les quatre cas de $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha > 2$.

Pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire pour un entier impair, la formule est

$$(3) \qquad M[m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 4R_2(m).$$

Pour $\alpha = 1$, c'est-à-dire pour un entier impairement pair, elle devient

$$(4) \quad M[2m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 4\left[4 - \left(\frac{-1}{m}\right)\right] R_2(m),$$

en sorte que la valeur de m (mod. 4) y joue un rôle.

Même remarque pour le cas de $\alpha = 2$, la formule étant alors

$$(5) \quad M[4m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 4\left[15 - \left(\frac{-1}{m}\right)\right] R_2(m).$$

Mais il n'en est plus ainsi dans le cas de $\alpha > 2$. Pour ce cas la formule devient

$$(6) \quad M[2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 15.4^{\alpha-1} R_2(m),$$

et $\left(\frac{-1}{m}\right)$ n'y figure plus.

6. En faisant $m = 9$, la formule (3) donne

$$\mathrm{M}[9 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2) = 288.$$

Cela est exact. On a trouvé plus haut deux cent quatre-vingt-douze représentations, pour l'entier 9, par la forme

$$x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2).$$

Mais ici on doit supprimer les quatre représentations impropres données par l'identité

$$9 = 3^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2);$$

le reste est bien deux cent quatre-vingt-huit.

En faisant $m = 1$ dans la formule (5), cette formule donne

$$\mathrm{M}[4 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 56.$$

On avait obtenu soixante représentations, tant propres qu'impropres, de l'entier 4; mais il faut ici retrancher quatre représentations répondant à l'identité

$$4 = 2^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2);$$

de là le reste cinquante-six.

Faisons enfin $m = 1$, $\alpha = 3$; la formule (6) nous donnera

$$\mathrm{M}[8 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 240,$$

résultat exact; car du nombre total deux cent cinquante-deux des représentations de l'entier 8, il faut (quand on se borne aux représentations propres) retrancher douze unités répondant aux douze représentations impropres que fournissent les deux identités

$$8 = 2^2 + 2^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2)$$

et

$$8 = 0^2 + 0^2 + 2(2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$

en sorte que le nombre des représentations propres n'est plus que deux cent quarante.