JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PHILLIPS

Solution de divers problèmes de Mécanique, dans lesquels les conditions imposées aux extrémités des corps, au lieu d'être invariables, sont des fonctions données du temps, et où l'on tient compte de l'inertie de toutes les parties du système

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 25-83.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__25_0>

SOLUTION

De divers problèmes de Mécanique, dans lesquels les conditions imposées aux extrémités des corps, au lieu d'être invariables, sont des fonctions données du temps, et où l'on tient compte de l'inertie de toutes les parties du système;

PAR M. PHILLIPS.

J'ai traité ces problèmes par deux procédés. L'un d'eux est appliqué dans le premier chapitre et l'autre dans le second.

CHAPITRE PREMIER.

PROBLÈME I.

Déterminer le mouvement moléculaire de toutes les parties d'une tige, dont une extrémité reçoit un mouvement donné, l'autre étant libre, et où chaque point se meut parallèlement à l'axe de cette tige.

Soit x la distance d'une tranche quelconque de cette tige à un point fixe pris sur l'axe, dans l'état de repos de celle-ci, quand elle n'est soumise à aucune force, et soit u ce qu'est devenu x dans le mouvement, au bout du temps t. L'allongement proportionnel est $\frac{du}{dx} - 1$.

Soient E le coefficient d'élasticité et ϖ le poids de l'unité de volume de la substance. L'équation aux différences partielles est

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\mathrm{E}g}{\varpi}\frac{d^2u}{dx^2} \tag{1}$$

ou

$$\frac{d^2u}{dt^2} = k^2\frac{d^2u}{dx^2}, \tag{2}$$

en faisant

$$\frac{Eg}{\varpi} = k^2. \tag{3}$$

L'intégrale générale de l'équation (2) est

$$u = f(x + kt) + F(x - kt), \tag{4}$$

f et F désignant deux fonctions arbitraires.

Il s'agit de déterminer directement les deux fonctions qui entrent dans la valeur de u. Je les désigne d'une manière générale par $f(\zeta)$ et $F(\zeta)$, et elles ont besoin d'être connues : 1° $f(\zeta)$ de $\zeta = 0$ à $\zeta = +\infty$, et 2° $F(\zeta)$ de $\zeta = l$ à $\zeta = -\infty$.

On a d'abord ces deux fonctions de $\zeta = 0$ à $\zeta = +l$, d'après l'état initial, et on les obtient ensuite pour toutes les autres valeurs de la variable, d'après les conditions assignées pour les extrémités.

L'état initial est donné de telle façon que, pour $t = 0$, on ait

$$u = \varphi(x) \tag{5}$$

et

$$\frac{du}{dt} = \psi(x). \tag{6}$$

Il faut donc qu'on ait, à cause de l'équation (4),

$$f(x) + F(x) = \varphi(x) \tag{7}$$

et

$$kf'(x) - kF'(x) = \psi(x)$$

ou, en intégrant cette dernière relation,

$$f(x) - F(x) = \frac{1}{k}\Psi(x), \tag{8}$$

en désignant par $\Psi(x)$ l'intégrale $\int \psi(x)\,dx$.

Il est inutile de tenir compte de la constante de cette intégrale, car elle disparaîtrait dans la valeur (4) de u.

On a donc

$$\Psi(x) = \int \psi(x)\, dx. \tag{9}$$

On déduit des équations (7) et (8)

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2k}\Psi(x) \tag{10}$$

et

$$F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2k}\Psi(x), \tag{11}$$

ou, en désignant d'une manière générale par ζ la variable, on a

$$f(\zeta) = \frac{1}{2}\varphi(\zeta) + \frac{1}{2k}\Psi(\zeta), \tag{12}$$

$$F(\zeta) = \frac{1}{2}\varphi(\zeta) - \frac{1}{2k}\Psi(\zeta). \tag{13}$$

Comme $\varphi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$ et par suite $\varphi(\zeta)$ et $\Psi(\zeta)$ sont données pour toutes les valeurs positives de la variable comprises entre o et l, il en résulte que $f(\zeta)$ et $F(\zeta)$ sont connues pour toutes les valeurs positives de la variable comprises entre o et l. Il reste à trouver ce qu'est $f(\zeta)$ de $\zeta = l$ à $\zeta = +\infty$, et ce qu'est $F(\zeta)$ de $\zeta = 0$ à $\zeta = -\infty$.

La suite des opérations dépend des conditions imposées aux extrémités.

Supposons donc que le mouvement imprimé à l'origine de la tige, répondant à $x = 0$, soit représenté par l'équation

$$u = \xi_0(t), \tag{14}$$

$\xi_0(t)$ étant une fonction donnée du temps. L'autre extrémité de la tige étant entièrement libre, on a

$$\frac{du}{dx} - 1 = 0 \quad \text{pour} \quad x = l. \tag{15}$$

Pour que l'équation (4) satisfasse à ces conditions, il faut qu'on ait, quel que soit t,

$$f(kt) + F(-kt) = \xi_0(t)$$

et

$$f'(l+kt) + F'(l-kt) = 1$$

ou, en faisant

(16) $$kt = \zeta,$$

$$f(\zeta) + F(-\zeta) = \xi_0\left(\frac{\zeta}{k}\right)$$

et

$$f'(l+\zeta) + F'(l-\zeta) = 1,$$

$f'(\ )$ et $F'(\ )$ désignent les dérivées des fonctions correspondantes.

On peut en intégrant remplacer cette dernière équation par

$$f(l+\zeta) - F(l-\zeta) = \zeta + C.$$

Pour déterminer la constante C, il suffit de faire $\zeta = 0$, et l'on a

$$C = f(l) - F(l),$$

ou, à cause de l'équation (8),

$$C = \frac{1}{k}\Psi(l).$$

On doit donc avoir définitivement, quel que soit ζ,

(17) $$f(\zeta) + F(-\zeta) = \xi_0\left(\frac{\zeta}{k}\right)$$

et

(18) $$f(l+\zeta) - F(l-\zeta) = \zeta + \frac{1}{k}\Psi(l).$$

Tout résulte maintenant de ces deux dernières équations.

En effet, comme $F(\zeta)$ est connue de $\zeta = 0$ à $\zeta = l$, il en est de même de $F(l-\zeta)$. Donc l'équation (18) fera connaître $f(l+\zeta)$ de $\zeta = 0$ à $\zeta = l$, ou, ce qui revient au même, $f(\zeta)$ de $\zeta = l$ à $\zeta = 2l$.

Remplaçons maintenant dans l'équation (18) ζ par $l+\zeta$ et nous aurons

$$f(2l+\zeta) = \mathrm{F}(-\zeta) + l + \zeta + \frac{1}{k}\Psi(l)$$

ou, à cause de l'équation (17),

$$f(2l+\zeta) = -f(\zeta) + l + \zeta + \xi_0\left(\frac{\zeta}{k}\right) + \frac{1}{k}\Psi(l). \tag{19}$$

Cette formule permet, quand on connaît $f(\zeta)$, d'obtenir $f(2l+\zeta)$ et par suite on déterminera successivement $f(\zeta)$ pour toutes les valeurs de ζ de 0 à $+\infty$.

Reste à connaître $\mathrm{F}(\zeta)$ de $\zeta = 0$ à $\zeta = -\infty$, ou, ce qui revient au même, $\mathrm{F}(-\zeta)$ de $\zeta = 0$ à $\zeta = +\infty$.

Or on a de suite, par l'équation (17),

$$\mathrm{F}(-\zeta) = -f(\zeta) + \xi_0\left(\frac{\zeta}{k}\right), \tag{20}$$

ce qui résout la question.

Cas d'un mouvement uniformément varié pour l'origine de la tige.

Je vais donner un exemple de ces calculs. Je suppose que le corps parte de sa position naturelle, chacune de ses parties étant alors en équilibre et sans vitesse initiale. J'admets de plus que l'on compte les u à partir de l'origine de la tige supposée en repos. On a alors

$$\varphi(x) = x, \quad \psi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \Psi(x) = 0$$

ou

$$[\varphi(\zeta) = \zeta, \quad \Psi(\zeta) = 0]. \tag{21}$$

Admettons que le mouvement donné qui est imposé à l'origine de la tige soit uniformément varié, de sorte que

$$\xi_0(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2$$

ou

$$\xi_0\left(\frac{\zeta}{k}\right) = \frac{\gamma\zeta^2}{2k^2}. \tag{22}$$

Convenons de désigner par $f(\zeta)\binom{0}{l}$ et $F(\zeta)\binom{0}{l}$ ce que sont ces fonctions pour toutes les valeurs de la variable, de 0 à l inclusivement. On aura, par les équations (12) et (13),

(23) $$f(\zeta)\binom{0}{l} = \frac{1}{2}\zeta$$

et

(24) $$F(\zeta)\binom{0}{l} = \frac{1}{2}\zeta.$$

Remplaçant dans l'équation (18), $F(l-\zeta)$ par sa valeur connue $\frac{1}{2}(l-\zeta)$, on en tire, en conservant le genre de notation ci-dessus et observant que $\Psi(l) = 0$,

$$f(l+\zeta)\binom{0}{l} = \frac{1}{2}\zeta + \frac{1}{2}l.$$

En faisant dans cette formule

$$l+\zeta = \zeta' \quad \text{ou} \quad \zeta = \zeta' - l,$$

on a donc

$$f(\zeta')\binom{l}{2l} = \frac{1}{2}\zeta'$$

ou, d'une manière générale,

$$f(\zeta)\binom{l}{2l} = \frac{1}{2}\zeta.$$

Comme cette formule coïncide avec l'équation (23), on peut écrire en général

(25) $$f(\zeta)\binom{0}{2l} = \frac{1}{2}\zeta.$$

Pour trouver les valeurs suivantes de $f(\zeta)$, remplaçons dans l'équation (19) $\zeta + 2l$ par ζ, ou ζ par $\zeta - 2l$, et nous aurons, dans le cas actuel, pour tout entier i,

(26) $$\left\{\begin{aligned} f(\zeta)\binom{2il}{2il+2l} = -f(\zeta-2l)\binom{2il-2l}{2il} + \zeta - l \\ + \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta-2l)^2. \end{aligned}\right.$$

Cela veut dire qu'après avoir déterminé $f(\zeta)$ pour toutes les valeurs de la variable depuis $(2i-2)l$ jusqu'à $2il$, on y remplacera ζ par $\zeta - 2l$, et substituant dans le second membre de l'équation (26), on aura $f(\zeta)$ depuis $\zeta = 2il$ jusqu'à $\zeta = (2i+2)l$.

On a ainsi

$$(27)\quad \begin{cases} f(\zeta)\begin{pmatrix}2l\\4l\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\zeta + \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta-2l)^2, \\ f(\zeta)\begin{pmatrix}4l\\6l\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\zeta + \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta-2l)^2 - \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta-4l)^2, \\ f(\zeta)\begin{pmatrix}6l\\8l\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\zeta + \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta-2l)^2 - \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta-4l)^2 \\ \qquad + \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta-6l)^2, \\ f(\zeta)\begin{pmatrix}8l\\10l\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\zeta + \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta-2l)^2 - \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta-4l)^2 \\ \qquad + \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta-6l)^2 - \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta-8l)^2. \end{cases}$$

La loi est visible et elle se continue indéfiniment.

On remarque que pour la valeur de ζ, qui sert à passer d'une fonction à la suivante, ces deux fonctions et leurs premières dérivées ont, ainsi que cela devait être, la même valeur. La même chose se vérifie pour $F(\zeta)$.

Il reste à déterminer $F(\zeta)$ de $\zeta = 0$ à $\zeta = -\infty$ ou, ce qui revient au même, $F(-\zeta)$ de $\zeta = 0$ à $\zeta = +\infty$.

Or on déduit immédiatement des valeurs de l'équation (17) et des valeurs ci-dessus de $f(\zeta)$

$$(28)\quad \begin{cases} F(-\zeta)\begin{pmatrix}0\\2l\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\zeta + \frac{\gamma\zeta^2}{2k^2}, \\ F(-\zeta)\begin{pmatrix}2l\\4l\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\zeta + \frac{\gamma\zeta^2}{2k^2} - \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta-2l)^2, \\ F(-\zeta)\begin{pmatrix}4l\\6l\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\zeta + \frac{\gamma\zeta^2}{2k^2} - \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta-2l)^2 + \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta-4l)^2, \end{cases}$$

$$(28)\ [\text{suite}]\quad \left\{\begin{aligned} F(-\zeta)\binom{6l}{8l} &= -\frac{1}{2}\zeta + \frac{\gamma\zeta^2}{2k^2} - \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta - 2l)^2 + \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta - 4l)^2 \\ &\qquad - \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta - 6l)^2, \\ F(-\zeta)\binom{8l}{10l} &= -\frac{1}{2}\zeta + \frac{\gamma\zeta^2}{2k^2} - \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta - 2l)^2 + \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta - 4l)^2 \\ &\qquad - \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta - 6l) + \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta - 8l)^2. \end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite.

Il est maintenant facile de former pour un point quelconque la valeur de u.

Supposons d'abord $kt < x$, ce qui n'aura lieu que pendant un temps extrêmement petit, car k est très-grand. Alors comme $x \leqq l$, il résulte que $x + kt$ est compris entre o et $2l$ et que $x - kt$ est compris entre o et l. Il faut donc prendre pour les fonctions f et F les expressions qui répondent à $f(\zeta)\binom{0}{2l}$ et $F(\zeta)\binom{0}{l}$. Donc alors

$$u = \frac{1}{2}(x + kt) + \frac{1}{2}(x - kt)$$

ou

$$(29)\qquad u = x,$$

ce qui indique que la tranche x ne s'est pas déplacée, ce qui devait être, car k ou $\sqrt{\frac{Eg}{\varpi}}$ est précisément la vitesse du son ou, si l'on veut, la vitesse de propagation d'un ébranlement dans la substance, et $kt < x$ signifie que l'ébranlement imprimé par le mouvement à l'origine de la tige n'est pas encore parvenu jusqu'à la tranche x.

Supposons maintenant $kt > x$, mais que $kt + x$ et par conséquent aussi $kt - x$ soient plus petits que $2l$. On prendra alors $f(\zeta)\binom{0}{2l}$ et $F(-\zeta)\binom{0}{2l}$, et l'on aura

$$u = \frac{1}{2}(x + kt) - \frac{1}{2}(kt - x) + \frac{\gamma}{2k^2}(x - kt)^2$$

ou

$$u = x + \frac{\gamma}{2k^2}(x - kt)^2. \tag{30}$$

Du reste la loi de formation permet de donner tout de suite la valeur de u pour x et t quelconques. Formons d'abord les valeurs correspondantes de $f(\zeta)$ et de $F(-\zeta)$.

Supposons donc ζ compris entre $2il$ et $2il + 2l$ et soit d'abord i pair. On somme facilement le second membre de la valeur générale de $f(\zeta)\binom{2il}{2il+2l}$, en groupant le deuxième terme et le troisième, le quatrième et le cinquième, le sixième et le septième, etc.

On a ainsi, pour i pair,

$$f(\zeta)\binom{2il}{2il+2l} = \frac{1}{2}\zeta + \frac{il\gamma}{k^2}[\zeta - (i+1)l]. \tag{31}$$

Si i est impair, on a, après les réductions,

$$f(\zeta)\binom{2il}{2il+2l} = \frac{1}{2}\zeta + \frac{\gamma}{2k^2}[\zeta^2 - 2(i+1)l\zeta + 2i(i+1)l^2]. \tag{32}$$

On obtient de même pour i pair

$$F(-\zeta)\binom{2il}{2il+2l} = -\frac{1}{2}\zeta + \frac{\gamma\zeta^2}{2k^2} - \frac{il\gamma}{k^2}[\zeta - (i+1)l], \tag{33}$$

et pour i impair

$$F(-\zeta)\binom{2il}{2il+2l} = -\frac{1}{2}\zeta + \frac{(i+1)l\gamma}{k^2}(\zeta - il). \tag{34}$$

Maintenant supposons $x + kt$ compris entre $2il$ et $2il + 2l$. Comme $kt - x$ en diffère de $2x$ qui est plus petit que $2l$, $kt - x$ sera compris entre $2il$ et $2il + 2l$ ou entre $2il$ et $2il - 2l$.

Dans le premier cas, on aura, si i est pair, en substituant tour à tour $x + kt$ et $kt - x$ pour ζ dans les formules précédentes,

$$u = x + \frac{2il\gamma}{k^2}x + \frac{\gamma}{2k^2}(kt - x)^2. \tag{35}$$

Si i est impair, on aura, toujours dans le premier cas,

$$u = x - \frac{2(i+1)l\gamma}{k^2}x + \frac{\gamma}{2k^2}(x+kt)^2. \tag{36}$$

Dans le second cas, on aura de même, si i est pair,

$$u = x + \frac{2il\gamma}{k^2}(kt - il), \tag{37}$$

et, si i est impair,

$$u = x + \frac{\gamma}{k^2}\left[(x-l)^2 + (kt-il)^2 + (i^2-1)l^2\right]. \tag{38}$$

Telles sont les formules très-simples qui expriment toutes les lois du mouvement. On en déduira immédiatement la vitesse $\frac{du}{dt}$ ainsi que l'allongement proportionnel $\frac{du}{dx} - 1$ pour tous les points et à une époque quelconque. Ces quantités sont données, comme on voit, sous une forme très-simple.

Il est facile de s'assurer que les équations (35), (36), (37), (38) vérifient toutes les conditions du problème.

D'abord elles satisfont toutes à l'équation aux différences partielles du second ordre (2). De plus elles vérifient les conditions imposées aux extrémités. En effet, si l'on considère l'origine de la tige qui répond à $x = 0$, ce sont les équations (35) et (36) qu'il faut prendre, car pour $x = 0$ la différence entre $kt - x$ et $kt + x$ est nulle. Or en faisant $x = 0$ dans les équations (35) et (36), elles donnent toutes deux

$$u = \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

Au contraire, si l'on considère l'autre extrémité de la tige qui répond à $x = l$, ce sont les équations (37) et (38) qu'il faut prendre, car, pour $x = l$, la différence entre $kt - x$ et $kt + x$ est $2l$. Or ces équations (37) et (38) donnent toutes deux

$$\frac{du}{dx} - 1 = 0 \quad \text{pour} \quad x = l.$$

On sait de plus qu'on a satisfait à l'état initial, puisqu'on a alors simplement $u = x$.

Enfin on voit que pour chaque valeur de x, la série des valeurs de u et de $\frac{du}{dt}$ ainsi que de $\frac{du}{dx}$ correspondantes à celles de t croissant indéfiniment forment une suite continue, malgré qu'il faille employer successivement les diverses formules (35), (36), (37) et (38). Cela tient à la propriété déjà démontrée des deux fonctions $f(\zeta)$ et $F(-\zeta)$ ainsi que de leurs dérivées du premier ordre qui ont chacune la même valeur pour la valeur de la variable ζ qui sert à passer de l'une quelconque d'entre elles à la suivante.

Cas d'un mouvement alternatif pour l'origine de la tige.

Supposons maintenant que l'origine de la tige soit soumise à un mouvement alternatif, comme celui qui serait donné par une manivelle, et dont la loi soit

$$(39) \qquad \xi_0(t) = r - r\cos\omega t \quad \text{ou} \quad \xi_0\left(\frac{\zeta}{k}\right) = r - r\cos\frac{\omega\zeta}{k},$$

r étant le rayon de la manivelle et ω la vitesse angulaire. L'autre extrémité de la tige est toujours supposée libre.

La même marche s'applique identiquement que dans l'exemple précédent. Je crois donc inutile de répéter tous les calculs. On trouve d'abord

$$(40) \qquad f(\zeta)\binom{0}{2l} = \frac{1}{2}\zeta$$

et

$$(41) \qquad F(\zeta)\binom{0}{l} = \frac{1}{2}\zeta.$$

Puis on obtient successivement, si i est pair,

$$(42)\left\{\begin{aligned} f(\zeta)\binom{2il}{2il+2l} = \frac{1}{2}\zeta &+ r - r\cos\frac{\omega(\zeta-2l)}{k} - r + r\cos\frac{\omega(\zeta-4l)}{k} \\ &+ r - r\cos\frac{\omega(\zeta-6l)}{k} - r + r\cos\frac{\omega(\zeta-8l)}{k} + \ldots \\ &- r + r\cos\frac{\omega(\zeta-2il)}{k}, \end{aligned}\right.$$

et, si i est impair,

$$(43)\quad \begin{cases} f(\zeta)\binom{2il}{2il+2l} = \frac{1}{2}\zeta + r - r\cos\frac{\omega(\zeta-2l)}{k} - r + r\cos\frac{\omega(\zeta-4l)}{k} \\ \qquad + r - r\cos\frac{\omega(\zeta-6l)}{k} - \ldots + r - r\cos\frac{\omega(\zeta-2il)}{k}. \end{cases}$$

On a ensuite, si i est pair,

$$(44)\quad \begin{cases} F(-\zeta)\binom{2il}{2il+2l} = -\frac{1}{2}\zeta + r - r\cos\frac{\omega\zeta}{k} - r + r\cos\frac{\omega(\zeta-2l)}{k} \\ \qquad + r - r\cos\frac{\omega(\zeta-4l)}{k} - r + r\cos\frac{\omega(\zeta-6l)}{k} - \ldots \\ \qquad + r - r\cos\frac{\omega(\zeta-2il)}{k}, \end{cases}$$

et, si i est impair,

$$(45)\quad \begin{cases} F(-\zeta)\binom{2il}{2il+2l} = -\frac{1}{2}\zeta + r - r\cos\frac{\omega\zeta}{k} - r + r\cos\frac{\omega(\zeta-2l)}{k} \\ \qquad + r - r\cos\frac{\omega(\zeta-4l)}{k} - \ldots - r + r\cos\frac{\omega(\zeta-2il)}{k}. \end{cases}$$

Les seconds membres se réduisent très-simplement en combinant d'abord les termes deux par deux et faisant usage de la formule connue

$$(45\ bis)\quad \begin{cases} \sin a + \sin(a+x) + \sin(a+2x) + \sin(a+3x) + \ldots \\ \qquad + \sin(a+mx) \\ \qquad = \dfrac{\sin\left(\frac{m+1}{2}x\right)\sin\left(a+\frac{mx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}. \end{cases}$$

Après quelques réductions simples, on trouve, si i est pair,

$$(46)\quad f(\zeta)\binom{2il}{2il+2l} = \frac{1}{2}\zeta + r\,\frac{\sin\left(\frac{il\omega}{k}\right)\sin\left\{\frac{\omega}{k}[\zeta-(i+1)l]\right\}}{\cos\frac{\omega l}{k}},$$

et, pour i impair,

$$(47)\quad f(\zeta)\binom{2il}{2il+2l} = \frac{1}{2}\zeta + r - r\frac{\cos\left(\frac{il\omega}{k}\right)\cos\left\{\frac{\omega}{k}[\zeta-(i+1)l]\right\}}{\cos\frac{\omega l}{k}}.$$

On a ensuite, si i est pair,

$$(48)\quad F(-\zeta)\binom{2il}{2il+2l} = -\frac{1}{2}\zeta + r - r\frac{\cos\frac{(i+1)l\omega}{k}\cos\frac{\omega}{k}(\zeta-il)}{\cos\frac{\omega l}{k}},$$

et, si i est impair,

$$(49)\quad F(-\zeta)\binom{2il}{2il+2l} = -\frac{1}{2}\zeta + r\frac{\sin\frac{(i+1)l\omega}{k}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta-il)}{\cos\frac{\omega l}{k}}.$$

Les formules (42), (43), (44) et (45) montrent encore que les fonctions $f(\zeta)$ et $F(\zeta)$ varient d'une manière continue ainsi que les dérivées premières quand on passe de l'une quelconque d'entre elles à la suivante.

Tant que $x > kt$ et que $kt + x < 2l$, on a, comme dans l'exemple précédent,

$$u = x.$$

Quand cela n'a plus lieu, on a pour u les expressions suivantes :

$x + kt$ étant compris entre $2il$ et $2il + 2l$, $kt - x$ peut être entre les mêmes limites ou entre $2il$ et $2il - 2l$.

Dans le premier cas, on a, si i est pair,

$$(50)\quad u = x + r - r\frac{\sin\left\{\frac{\omega}{k}[kt-(2i+1)l]\right\}\sin\frac{\omega x}{k} + \cos(\omega t)\cos\frac{\omega}{k}(l-x)}{\cos\frac{\omega l}{k}},$$

et, si i est impair,

$$(51)\quad u = x + r - r\frac{\cos(\omega t)\cos\frac{\omega}{k}(l-x) - \sin\left\{\frac{\omega}{k}[kt-(2i+1)l]\right\}\sin\frac{\omega x}{k}}{\cos\frac{\omega l}{k}}.$$

Dans le second cas, on a, si i est pair,

$$(52)\qquad u = x + 2r\,\frac{\sin\left(\frac{il\omega}{k}\right)\sin\left[\frac{\omega}{k}(kt - il)\right]\cos\frac{\omega}{k}(l - x)}{\cos\frac{\omega l}{k}},$$

et, si i est impair,

$$(53)\qquad u = x + 2r - 2r\,\frac{\cos\left(\frac{il\omega}{k}\right)\cos\left[\frac{\omega}{k}(kt - il)\right]\cos\frac{\omega}{k}(l - x)}{\cos\frac{\omega l}{k}}.$$

On s'assure encore facilement :

1° Que ces quatre formules vérifient l'équation aux différences

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = k^2\frac{d^2 u}{dx^2};$$

2° Que les deux premières, savoir (50) et (51), donnent

$$u = r - r\cos\omega t \quad \text{pour} \quad x = 0;$$

3° Que les deux dernières, soit (52) et (53), donnent

$$\frac{du}{dx} - 1 = 0 \quad \text{pour} \quad x = l.$$

PROBLÈME II.

Voici encore un autre problème du même genre, important pour la pratique. Il est relatif à une bielle d'accouplement, et je le pose de la manière suivante :

AB *est une bielle d'accouplement,* AC *et* BD *sont deux manivelles parallèles de rayon* r, ω *est la vitesse angulaire. Soient* σ *la section de la bielle de longueur primitive,* l *et* p *son poids. Soit enfin* Q *la résistance supposée constante et appliquée en* B *tangentiellement à la circonférence* BD.

Tous les points de la bielle ont une même force centrifuge égale *a $\omega^2 r$, pour l'unité de masse, dont la résultante se partage en deux forces égales chacune à $\frac{p}{2g}\omega^2 r$, appliquées en A et B suivant les manivelles, lesquelles exercent à leur tour contre la bielle des actions égales et contraires.*

Représentons donc par $\frac{p}{2g}\omega^2 r$ l'action de la manivelle BD contre la bielle, cette force s'exerçant de B vers D.

Je prends pour origine du temps l'instant où le point A passe en H, c'est-à-dire au point mort, et je suppose qu'à ce moment l'état initial soit tel, que la vitesse de tous les points de la bielle soit nulle et que celle-ci soit alors simplement en équilibre sous l'action de la force centrifuge.

En conservant les notations antérieures, cela revient à poser

$$\varphi(x) = x\left(1 + \frac{p}{2\mathrm{E}\sigma g}\omega^2 r\right), \tag{54}$$

$$\psi(x) = 0. \tag{55}$$

Quant aux conditions imposées aux extrémités, elles sont que la projection du point A sur CD soit toujours à la distance $r - r\cos\omega t$ du point H, et que la force élastique au point B fasse équilibre aux composantes suivant BA de la force Q de l'action de la manivelle BD. Il faut donc qu'on ait, quel que soit t,

$$u = r - r\cos\omega t \quad \text{pour} \quad x = 0, \tag{56}$$

et

$$\frac{du}{dx} = 1 - \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{E}\sigma}\sin\omega t + \frac{p}{2\mathrm{E}\sigma g}\omega^2 r\cos\omega t \quad \text{pour} \quad x = l. \tag{57}$$

On voit que les conditions choisies pour l'état initial sont compatibles avec celles imposées aux extrémités.

La vitesse initiale de tous les points de la bielle étant nulle, on sait que $f(\zeta)\binom{0}{l}$ ainsi que $\mathrm{F}(\zeta)\binom{0}{l}$ sont toutes deux égales à $\frac{1}{2}\varphi(\zeta)$.

On a donc

$$f(\zeta)\binom{0}{l} = \frac{1}{2}\zeta\left(1 + \frac{p}{2E\sigma g}\omega^2 r\right) \tag{58}$$

et

$$F(\zeta)\binom{0}{l} = \frac{1}{2}\zeta\left(1 + \frac{p}{2E\sigma g}\omega^2 r\right). \tag{59}$$

D'ailleurs la marche générale précédemment indiquée s'applique sans difficulté. Tout se déduit toujours des relations précédentes, combinées avec celles relatives aux extrémités, et qui sont

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} & f(\zeta) + F(-\zeta) = r - r\cos\frac{\omega\zeta}{k} \\ \text{et}\quad & f'(l+\zeta) + F'(l-\zeta) = 1 - \frac{Q}{E\sigma}\sin\frac{\omega\zeta}{k} + \frac{p}{2E\sigma g}\omega^2 r\cos\frac{\omega\zeta}{k}. \end{aligned}\right.$$

Cette dernière se remplace encore par son intégrale qui est

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} f(l+\zeta) - F(l-\zeta) = \zeta & - \frac{Q}{E\sigma}\frac{k}{\omega} + \frac{Q}{E\sigma}\frac{k}{\omega}\cos\frac{\omega\zeta}{k} \\ & + \frac{p}{2E\sigma g}k\omega r\sin\frac{\omega\zeta}{k}, \end{aligned}\right.$$

la constante étant déterminée de manière que, pour $\zeta = 0$, le second membre reproduise la valeur connue de $f(l) - F(l)$ qui est zéro.

Connaissant $F(l-\zeta)$ de $\zeta = 0$ à $\zeta = l$, puisqu'on a $F(\zeta)$ entre ces limites, on déduit de l'équation (61) $f(l+\zeta)\binom{0}{l}$ ou $f(\zeta)\binom{l}{2l}$.

De même changeant dans l'équation (61) ζ en $\zeta + l$ et y remplaçant $F(-\zeta)$ par sa valeur tirée de l'équation (60), on aura $f(2l+\zeta)$ quand on connaîtra $f(\zeta)$ ou, ce qui revient au même, on connaîtra $f(\zeta)$ quand on connaîtra $f(\zeta - 2l)$, ce qui donne ici la formule

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} f(\zeta) = \zeta - l + r - r\cos\frac{\omega(\zeta-2l)}{k} & - \frac{Q}{E\sigma}\frac{k}{\omega} + \frac{Q}{E\sigma}\frac{k}{\omega}\cos\frac{\omega(\zeta-l)}{k} \\ & + \frac{p}{2E\sigma g}k\omega r\sin\frac{\omega(\zeta-l)}{k} - f(\zeta-2l). \end{aligned}\right.$$

Dans ce problème, $f(\zeta)\binom{l}{2l}$ n'a plus la même forme que $f(\zeta)\binom{0}{l}$. On l'obtient par l'équation (61), qui donne

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} f(\zeta)\binom{l}{2l} &= \tfrac{1}{2}\zeta - \tfrac{1}{2}(\zeta - 2l)\frac{p}{2\mathrm{E}\sigma g}\omega^2 r - \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{E}\sigma}\frac{k}{\omega} \\ &\quad + \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{E}\sigma}\frac{k}{\omega}\cos\frac{\omega(\zeta - l)}{k} + \frac{p}{2\mathrm{E}\sigma g}k\omega r \sin\frac{\omega(\zeta - l)}{k}. \end{aligned}\right.$$

A l'aide de la formule générale de l'équation (62) on déduira successivement $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$ de $f(\zeta)\binom{0}{l}$, puis $f(\zeta)\binom{4l}{5l}$ de $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$, puis $f(\zeta)\binom{6l}{7l}$ de $f(\zeta)\binom{4l}{5l}$, et ainsi de suite. De même, on obtiendra successivement, en partant de $f(\zeta)\binom{l}{2l}$, les expressions de $f(\zeta)\binom{3l}{4l}$, $f(\zeta)\binom{5l}{6l}$, $f(\zeta)\binom{7l}{8l}$, etc.

Ces résultats se réduisent très-simplement, en faisant usage de la relation déjà employée [équation (45 *bis*)] et de la suivante

$$\cos a + \cos(a + x) + \cos(a + 2x) + \ldots + \cos(a + mx) = \frac{\sin\left(\frac{m+1}{2}x\right)\cos\left(a + \frac{mx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}},$$

et l'on trouve définitivement les quatre types différents qui suivent :

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} & f(\zeta)\binom{4il}{4il+l} \\ &= \tfrac{1}{2}\zeta + \tfrac{1}{2}(\zeta - 4il)\frac{p}{2\mathrm{E}\sigma g}\omega^2 r + r\frac{\sin\frac{2il\omega}{k}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta - 2il - l)}{\cos\frac{\omega l}{k}} \\ &\quad - \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{E}\sigma}\frac{k}{\omega}\frac{\sin\frac{2il\omega}{k}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta - 2il)}{\cos\frac{\omega l}{k}} \\ &\quad + \frac{p}{2\mathrm{E}\sigma g}k\omega r\frac{\sin\frac{2il\omega}{k}\cos\frac{\omega}{k}(\zeta - 2il)}{\cos\frac{\omega l}{k}}. \end{aligned}\right.$$

$$
(65)\left\{
\begin{aligned}
&\qquad\qquad f(\zeta)\binom{4il+l}{4il+2l}\\
&=\frac{1}{2}\zeta-\frac{1}{2}(\zeta-4il-2l)\frac{p}{2\mathrm{E}\sigma g}\omega^2 r+r\,\frac{\sin\dfrac{2il\omega}{k}\sin\dfrac{\omega}{k}(\zeta-2il-l)}{\cos\dfrac{\omega l}{k}}\\
&\qquad-\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{E}\sigma}\frac{k}{\omega}+\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{E}\sigma}\frac{k}{\omega}\,\frac{\cos\dfrac{(2i+1)l\omega}{k}\cos\dfrac{\omega}{k}(\zeta-2il-l)}{\cos\dfrac{\omega l}{k}}\\
&\qquad+\frac{p}{2\mathrm{E}\sigma g}k\omega r\,\frac{\cos\dfrac{(2i+1)l\omega}{k}\sin\dfrac{\omega}{k}(\zeta-2il-l)}{\cos\dfrac{\omega l}{k}},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(66)\left\{
\begin{aligned}
&\qquad\qquad f(\zeta)\binom{4il+2l}{4il+3l}\\
&=\frac{1}{2}\zeta-\frac{1}{2}(\zeta-4il-2l)\frac{p}{2\mathrm{E}\sigma g}\omega^2 r+r-r\,\frac{\cos\dfrac{(2i+1)l\omega}{k}\cos\dfrac{\omega}{k}(\zeta-2il-2l)}{\cos\dfrac{\omega l}{k}}\\
&\qquad-\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{E}\sigma}\frac{k}{\omega}+\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{E}\sigma}\frac{k}{\omega}\,\frac{\cos\dfrac{(2i+1)l\omega}{k}\cos\dfrac{\omega}{k}(\zeta-2il-l)}{\cos\dfrac{\omega l}{k}}\\
&\qquad+\frac{p}{2\mathrm{E}\sigma g}k\omega r\,\frac{\cos\dfrac{(2i+1)l\omega}{k}\sin\dfrac{\omega}{k}(\zeta-2il-l)}{\cos\dfrac{\omega l}{k}}.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(67)\left\{
\begin{aligned}
&\qquad\qquad f(\zeta)\binom{4il+3l}{4il+4l}\\
&=\frac{1}{2}\zeta+\frac{1}{2}(\zeta-4il-4l)\frac{p}{2\mathrm{E}\sigma g}\omega^2 r+r-r\,\frac{\cos\dfrac{(2i+1)l\omega}{k}\cos\dfrac{\omega}{k}(\zeta-2il-2l)}{\cos\dfrac{\omega l}{k}}\\
&\qquad-\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{E}\sigma}\frac{k}{\omega}\,\frac{\sin\dfrac{2(i+1)l\omega}{k}\sin\dfrac{\omega}{k}(\zeta-2il-2l)}{\cos\dfrac{\omega l}{k}}\\
&\qquad+\frac{p}{2\mathrm{E}\sigma g}k\omega r\,\frac{\sin\dfrac{2(i+1)l\omega}{k}\cos\dfrac{\omega}{k}(\zeta-2il-2l)}{\cos\dfrac{\omega l}{k}}.
\end{aligned}
\right.
$$

On peut remarquer que les équations (64) et (65) donnent la même valeur pour $f(\zeta)$ et pour $f'(\zeta)$ quand $\zeta = 4il + l$. Il en est de même des équations (65) et (66) pour $\zeta = 4il + 2l$; de même des équations (66) et (67) pour $\zeta = 4il + 3l$, et en général pour deux fonctions consécutives pour la valeur de la variable qui sert à passer de l'une à l'autre. Cela devait être, car u, ainsi que ses dérivées du premier ordre, $\frac{du}{dt}$ et $\frac{du}{dx}$, ne peuvent varier que d'une manière continue, malgré que les fonctions (64), (65), (66), (67), etc., soient réellement discontinues ou exprimées d'une manière différente, c'est-à-dire que si l'on représentait graphiquement $f(\zeta)$, elle serait l'ordonnée d'une courbe composée d'une infinité d'arcs appartenant à des types différents, mais néanmoins se raccordant toujours tangentiellement.

La même remarque a lieu pour la fonction F, dont l'expression générale donnée par l'équation (60) est

$$(68) \qquad \left\{ \begin{aligned} F(-\zeta)\binom{nl}{nl+l} &= -f(\zeta)\binom{nl}{nl+l} \\ &\quad + r - r\cos\frac{\omega\zeta}{k}, \end{aligned} \right.$$

n étant un nombre entier positif quelconque.

Avec les formules précédentes, on aura l'état de toutes les parties de la bielle à une époque quelconque. Il est facile de se rendre compte qu'on peut avoir douze combinaisons différentes. Ainsi, comme la différence entre $x + kt$ et $kt - x$, laquelle est $2x$, est forcément comprise entre o et $2l$, il en résulte que, s'il faut prendre $f(\zeta)\binom{ml}{ml+l}$, m étant un nombre entier quelconque, $F(-\zeta)$ peut appartenir soit à $F(-\zeta)\binom{ml}{ml+l}$ ou à $F(-\zeta)\binom{ml-l}{ml}$ ou encore à $F(-\zeta)\binom{ml-2l}{ml-l}$. Donc, chaque type de $f(\zeta)$ représenté par l'une des quatre formules (64), (65), (66) et (67) donnera trois combinaisons possibles pour la valeur de u.

Supposons, par exemple, que $x + kt$ et $kt - x$ soient tous deux compris entre $4il$ et $4il + l$. Alors on aura

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned} u = {} & x\left(1 + \frac{p}{2\mathrm{E}\sigma g}\,\omega^2 r\right) + r - r\cos\frac{\omega}{k}(kt - x) \\ & + 2r\,\frac{\sin\dfrac{2il\omega}{k}\cos\dfrac{\omega}{k}(kt - 2il - l)\sin\dfrac{\omega x}{k}}{\cos\dfrac{\omega l}{k}} \\ & - 2\,\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{E}\sigma}\,\frac{k}{\omega}\,\frac{\sin\dfrac{2il\omega}{k}\cos\dfrac{\omega}{k}(kt - 2il)\sin\dfrac{\omega x}{k}}{\cos\dfrac{\omega l}{k}} \\ & - \frac{p}{\mathrm{E}\sigma g}\,k\omega r\,\frac{\sin\dfrac{2il\omega}{k}\sin\dfrac{\omega}{k}(kt - 2il)\sin\dfrac{\omega x}{k}}{\cos\dfrac{\omega l}{k}}. \end{aligned}\right.$$

Il est évident que, pour $x = 0$, la différence entre $x + kt$ et $kt - x$ étant nulle, cette formule est applicable à l'origine de la bielle, et, par conséquent, qu'en y faisant $x = 0$, on doit satisfaire à la condition (56); or c'est effectivement ce qui a lieu.

Supposons maintenant que x et t soient tels, que $x + kt$ étant compris entre $4il + 2l$ et $4il + 3l$, $kt - x$ le soit entre $4il$ et $4il + l$. On a alors

$$(70)\quad \left\{\begin{aligned} u = {} & x - (kt - 4il - l)\,\frac{p}{2\mathrm{E}\sigma g}\,\omega^2 r + r \\ & - r\,\frac{\cos\dfrac{\omega}{k}(kt - 4il - 2l)\cos\dfrac{\omega}{k}(l - x) - \sin\dfrac{\omega}{k}(kt - l)\sin\dfrac{\omega x}{k}}{\cos\dfrac{\omega l}{k}} - r\cos\frac{\omega}{k}(kt - x) \\ & - \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{E}\sigma}\,\frac{k}{\omega} + \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{E}\sigma}\,\frac{k}{\omega}\,\frac{\cos\dfrac{\omega}{k}(kt - 4il - l)\cos\dfrac{\omega}{k}(l - x) - \sin\omega t\sin\dfrac{\omega x}{k}}{\cos\dfrac{\omega l}{k}} \\ & + \frac{p}{2\mathrm{E}\sigma g}\,k\omega r\,\frac{\sin\dfrac{\omega}{k}(kt - 4il - l)\cos\dfrac{\omega}{k}(l - x) + \cos\omega t\sin\dfrac{\omega x}{k}}{\cos\dfrac{\omega l}{k}}. \end{aligned}\right.$$

Pour $x=l$, la différence entre $x+kt$ et $kt-x$ étant égale à $2l$, la formule ci-dessus est applicable à l'extrémité de la bielle. Par conséquent l'expression (70) doit satisfaire à la condition (57), et c'est ce qui a lieu en effet.

On déduira facilement, dans tous les cas, de la valeur de u, celle de la vitesse $\frac{du}{dt}$ et de l'allongement proportionnel $\frac{du}{dx}-1$.

PROBLÈME III.

Voici encore un autre exemple important. Il s'agit d'une tige terminée par un piston soumis à l'action de la vapeur et douée d'un mouvement alternatif.

Prenons pour l'état initial

$$[\varphi(x)=x \quad \text{et} \quad \psi(x)=0], \tag{71}$$

état qui est compatible avec les conditions imposées aux extrémités.

L'origine de la tige est soumise à un mouvement alternatif que nous supposerons exprimé par la relation

$$\xi_0(t)=r-r\cos\omega t. \tag{72}$$

L'autre extrémité est soumise à l'action de la vapeur. Cette force est périodique, c'est-à-dire qu'elle redevient la même quand l'angle de rotation ωt a augmenté de 2π, et, de plus, nous devons admettre qu'elle reprend la même valeur, mais avec un signe contraire, quand ωt augmente de π.

Quant à sa valeur absolue, elle dépend des circonstances absolues de la distribution, telles que l'avance à l'admission, la fin de l'admission, la détente, l'échappement et la compression, lesquelles peuvent varier de mille manières.

Dans tous les cas possibles, cette quantité est développable en série trigonométrique de sinus et de cosinus des multiples d'un même arc. Mais pour ne pas compliquer les calculs, nous allons choisir la forme suivante qui a l'avantage de représenter simplement et approximativement l'effet moyen de la vapeur, particulièrement dans les machines locomotives. C'est

$$Q = G\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right). \tag{73}$$

Pour $t = 0$ et pour $\omega t = \frac{\pi}{2}$, on a

$$Q = G\sin\frac{\pi}{4}, \tag{74}$$

car

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}.$$

Pour $\omega t = \frac{\pi}{4}$, on a

$$Q = G.$$

Jusqu'à $\omega t = \frac{\pi}{2}$, la vapeur serait dans la période d'admission, qui commencerait à proprement parler pour $\omega t = -\frac{\pi}{4}$, angle d'avance à l'admission.

L'intensité de la force ne serait pas absolument constante, puisqu'elle varierait entre les limites $G\sin\frac{\pi}{4}$ et G.

De $\omega t = \frac{\pi}{2}$ à $\omega t = \frac{3}{4}\pi$, la pression diminue progressivement jusqu'à zéro. Ce serait là le commencement tout à la fois de l'échappement sur la face considérée du piston et de la compression, ou plutôt de l'admission sur la face opposée.

De plus l'expression (73) reprend la même valeur toutes les fois que ωt augmente de 2π, et elle ne fait que changer de signe quand ωt augmente de π.

On pourrait donc écrire comme il suit la condition imposée à l'extrémité de la tige, en considérant la vapeur comme agissant directement sur cette extrémité,

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{G}{E\sigma}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right). \tag{75}$$

Alors le problème se résoudrait d'une manière tout à fait analogue au précédent, relatif à la bielle d'accouplement. Mais on peut aussi vouloir tenir compte de l'inertie du piston. Dans ce dernier cas, l'équation de condition relative à l'extrémité de la tige est, en appelant P le poids du piston,

$$\frac{P}{g}\frac{d^2u}{dt^2} = G\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) - E\sigma\left(\frac{du}{dx} - 1\right) \quad \text{pour} \quad x = l$$

ou

$$(76) \qquad \frac{P}{g}\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_{x=l} + E\sigma\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=l} = G\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + E\sigma.$$

Comme d'ailleurs on a toujours

$$u = f(x + kt) + F(x - kt),$$

les conditions relatives aux extrémités peuvent s'écrire de la manière suivante, en faisant $kt = \zeta$ et observant que

$$\frac{E\sigma g}{Pk^2} = \frac{p}{Pl},$$

p étant le poids même de la tige :

$$(77) \qquad f(\zeta) + F(-\zeta) = r - r\cos\frac{\omega\zeta}{k}$$

et

$$(78) \qquad \left\{ \begin{aligned} & f''(l+\zeta) + \frac{p}{Pl}f'(l+\zeta) + F''(l-\zeta) + \frac{p}{Pl}F'(l-\zeta) \\ & \qquad = \frac{Gg}{Pk^2}\cos\left(\frac{\omega\zeta}{k} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{p}{Pl}. \end{aligned} \right.$$

On a, comme dans les autres questions, à cause de l'équation (71),

$$(79) \qquad \left[f(\zeta)\binom{0}{l} = F(\zeta)\binom{0}{l} = \tfrac{1}{2}\zeta\right].$$

La relation (78) fait connaître tout de suite $f(\zeta)\binom{l}{2l}$. En effet, cette équation s'intègre et donne, en appelant C une constante,

$$(80)\quad \begin{cases} f'(l+\zeta)+\frac{p}{Pl}f(l+\zeta) \\ =C+\frac{p}{Pl}\zeta+\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\left(\frac{\omega\zeta}{k}-\frac{\pi}{4}\right)+F'(l-\zeta)+\frac{p}{Pl}F(l-\zeta). \end{cases}$$

$F(l-\zeta)$ et par suite $F'(l-\zeta)$ sont données par l'équation (79) pour toutes les valeurs de ζ comprises entre o et l, et, par conséquent, l'équation (80) fera connaître $f(l+\zeta)\binom{0}{l}$ ou $f(\zeta)\binom{l}{2l}$.

La constante C se détermine d'après la condition que pour $\zeta=0$ le premier membre donne la valeur, déjà connue par l'équation (79), de $f'(l)+\frac{p}{Pl}f(l)$, laquelle valeur est

$$(81)\qquad C=\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\frac{\pi}{4}.$$

Mettant cette valeur pour C dans l'équation (80) et y remplaçant $F'(l-\zeta)$ par $\frac{1}{2}$ et $F(l-\zeta)$ par $\frac{1}{2}(l-\zeta)$, puis mettant ζ à la place de $l+\zeta$ ou $\zeta-l$ à celle de ζ, on a, pour l'équation (80),

$$(82)\quad \begin{cases} f'(\zeta)\binom{l}{2l}+\frac{p}{Pl}f(\zeta)\binom{l}{2l} \\ =\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{p}{Pl}\zeta+\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\left[\frac{\omega}{k}(\zeta-l)-\frac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

Cette équation, qui est linéaire du premier ordre par rapport à $f(\zeta)\binom{l}{2l}$ est intégrable, et, en appelant C_1 une constante, on a

$$(83)\quad \begin{cases} f(\zeta)\binom{l}{2l} \\ =e^{-\frac{p}{Pl}\zeta}\left(C_1+\int e^{\frac{p}{Pl}\zeta}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{p}{Pl}\zeta+\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\left[\frac{\omega}{k}(\zeta-l)-\frac{\pi}{4}\right]\right\}d\zeta\right), \end{cases}$$

e étant la base des logarithmes népériens.

Les intégrations indiquées s'effectuent sans difficulté. La constante C_1

se détermine d'après la condition que, pour $\zeta = l$, valeur de la variable qui sert de transition de la fonction $f(\zeta)\binom{0}{l}$ à la fonction $f(\zeta)\binom{l}{2l}$, ces deux fonctions aient la même valeur. Il est à remarquer d'ailleurs qu'à cause de la manière dont la première constante C a été déterminée, $f'(\zeta)\binom{0}{l}$ et $f'(\zeta)\binom{l}{2l}$ ont aussi, comme cela doit être, la même valeur pour $\zeta = l$.

On a ainsi, tous calculs faits,

$$(84)\quad \left\{\begin{aligned} f(\zeta)\binom{l}{2l} &= \frac{1}{2}\zeta + \frac{Ggl}{pk\omega}\sin\frac{\pi}{4} \\ &+ \frac{Gg}{Pk\omega}\,\frac{\frac{p}{Pl}\sin\left[\frac{\omega}{k}(\zeta - l) - \frac{\pi}{4}\right] - \frac{\omega}{k}\cos\left[\frac{\omega}{k}(\zeta - l) - \frac{\pi}{4}\right]}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}} \\ &+ \frac{G}{E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\,\frac{\frac{p}{Pl} - \frac{\omega}{k}}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}}\,e^{-\frac{p}{Pl}(\zeta - l)}. \end{aligned}\right.$$

Les expressions suivantes de $f(\zeta)$, savoir $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$, $f(\zeta)\binom{3l}{4l}$, $f(\zeta)\binom{4l}{5l}$, etc., s'obtiendront d'une manière analogue à ce qui a été fait précédemment.

Ainsi, remplaçant dans l'équation (78) ζ par $l + \zeta$ et intégrant une première fois, on a, C étant une constante,

$$f'(2l + \zeta) + \frac{p}{Pl}f(2l + \zeta)$$

$$= C + \frac{p}{Pl}(\zeta + l) + \frac{Gg}{Pk\omega}\sin\left[\frac{\omega}{k}(\zeta + l) - \frac{\pi}{4}\right] + F'(-\zeta) + \frac{p}{Pl}F(-\zeta).$$

Remplaçant $F(-\zeta)$ et $F'(-\zeta)$ par leurs valeurs tirées de l'équation (77), puis ζ par $\zeta - 2l$, on a

$$(85)\quad \left\{\begin{aligned} & f'(\zeta) + \frac{p}{Pl} f(\zeta) \\ & = C + \frac{p}{Pl}(\zeta - l) - \frac{\omega r}{k}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta - 2l) + \frac{p}{Pl} r - \frac{p}{Pl} r \cos\frac{\omega}{k}(\zeta - 2l) \\ & \quad + \frac{Gg}{Pk\omega}\sin\left[\frac{\omega}{k}(\zeta - l) - \frac{\pi}{4}\right] + f'(\zeta - 2l) - \frac{p}{Pl} f(\zeta - 2l), \end{aligned}\right.$$

équation qui fait connaître $f(\zeta)$ quand on connaît $f(\zeta - 2l)$, c'est-à-dire cette fonction pour les valeurs de la variable inférieures de $2l$.

Il est facile de se rendre compte que la constante C a toujours la même valeur. En effet, supposons d'abord qu'il s'agisse de $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$. Pour $\zeta = 3l$, il faut que $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$ et $f'(\zeta)\binom{2l}{3l}$ aient respectivement les mêmes valeurs que $f(\zeta)\binom{3l}{4l}$ et que $f'(\zeta)\binom{3l}{4l}$. Donc le premier membre de l'équation (85) et, par suite, le second membre, doivent avoir, pour $\zeta = 3l$, la même valeur, soit qu'on s'occupe de $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$ ou de $f(\zeta)\binom{3l}{4l}$. Or, dans le premier cas, il faut prendre, pour $f(\zeta - 2l)$ et pour $f'(\zeta - 2l)$, la fonction $f(\zeta)\binom{0}{l}$ et $f'(\zeta)\binom{0}{l}$ où l'on remplacera ζ par $\zeta - 2l$. Dans le second cas, il faut prendre pour $f(\zeta - 2l)$ et $f'(\zeta - 2l)$, la fonction $f(\zeta)\binom{l}{2l}$ et $f'(\zeta)\binom{l}{2l}$ en y remplaçant ζ par $\zeta - 2l$. Or, remplacer dans ces dernières fonctions ζ par $\zeta - 2l$ et y faire ensuite $\zeta = 3l$, cela revient à y faire de suite $\zeta = l$. Or, pour $\zeta = l$, on a

$$f(\zeta)\binom{0}{l} = f(\zeta)\binom{l}{2l}$$

et

$$f'(\zeta)\binom{0}{l} = f'(\zeta)\binom{l}{2l}.$$

Comme d'ailleurs le second membre de l'équation (85) est le même pour deux fonctions consécutives $f(\zeta)$, C a forcément la même valeur pour $f(\zeta)\binom{3l}{4l}$ que pour $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$. On démontrerait absolument de même qu'elle est la même pour $f(\zeta)\binom{4l}{5l}$ que pour $f(\zeta)\binom{3l}{4l}$; la même pour $f(\zeta)\binom{5l}{6l}$ que pour $f(\zeta)\binom{4l}{5l}$ et ainsi de suite indéfiniment. Donc C a la même valeur pour toutes les fonctions que pour $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$.

Occupons-nous donc d'avoir C pour $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$.

Et d'abord, pour appliquer la relation générale (85) à $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$, il faut remplacer dans le second membre $f(\zeta-2l)$ et $f'(\zeta-2l)$ par les expressions qu'on obtient en substituant $\zeta-2l$ à ζ dans $f(\zeta)\binom{0}{l}$ et $f'(\zeta)\binom{0}{l}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}f'(\zeta)\binom{2l}{3l}+\frac{p}{Pl}f(\zeta)\binom{2l}{3l}&=C+\frac{1}{2}+\frac{p}{2Pl}\zeta-\frac{\omega r}{k}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta-2l)\\&+\frac{p}{Pl}r-\frac{p}{Pl}r\cos\frac{\omega}{k}(\zeta-2l)+\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\left[\frac{\omega}{k}(\zeta-l)-\frac{\pi}{4}\right].\end{aligned}$$

Déterminant la constante de telle manière que, pour $\zeta=2l$, le deuxième membre de la relation ci-dessus ait la même valeur que le second membre de l'équation (82), on a

$$C=\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\frac{\pi}{4},$$

qui est, dès lors, la valeur commune de la constante C pour toutes les fonctions, et l'on a

$$(86)\quad\left\{\begin{aligned}&f'(\zeta)\binom{2l}{3l}+\frac{p}{Pl}f(\zeta)\binom{2l}{3l}=\frac{1}{2}+\frac{p}{2Pl}\zeta\\&-\frac{\omega r}{k}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta-2l)+\frac{p}{Pl}r-\frac{p}{Pl}r\cos\frac{\omega}{k}(\zeta-2l)\\&+\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\left[\frac{\omega}{k}(\zeta-l)-\frac{\pi}{4}\right].\end{aligned}\right.$$

Cette équation linéaire et de premier ordre par rapport à $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$ s'intègre absolument comme l'équation (82).

Il en est de même de celles qui sont relatives aux fonctions suivantes, et de cette manière ou déduira successivement

$$f(\zeta)\binom{2l}{3l} \quad \text{de} \quad f(\zeta)\binom{0}{l};$$
$$f(\zeta)\binom{3l}{4l} \quad \text{de} \quad f(\zeta)\binom{l}{2l},$$
$$f(\zeta(\binom{4l}{5l} \quad \text{de} \quad f(\zeta)\binom{2l}{3l},$$

et ainsi de suite.

La seconde constante introduite par l'intégration se détermine toujours d'après la condition que deux fonctions consécutives aient la même valeur pour la valeur de la variable qui leur est commune.

On obtient ainsi

$$(87)\quad \left\{\begin{aligned} f(\zeta)\binom{2l}{3l} = {} & \frac{1}{2}\zeta - \frac{\omega r}{k}\,\frac{\frac{p}{Pl}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta-2l) - \frac{\omega}{k}\cos\frac{\omega}{k}(\zeta-2l)}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}} + r \\ & - \frac{p}{Pl}\,r\,\frac{\frac{p}{Pl}\cos\frac{\omega}{k}(\zeta-2l) + \frac{\omega}{k}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta-2l)}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}} + \frac{Ggl}{pk\omega}\sin\frac{\pi}{4} \\ & + \frac{Gg}{Pk\omega}\,\frac{\frac{p}{Pl}\sin\left[\frac{\omega}{k}(\zeta-l)-\frac{\pi}{4}\right] - \frac{\omega}{k}\cos\left[\frac{\omega}{k}(\zeta-l)-\frac{\pi}{4}\right]}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}} \\ & + \frac{G}{E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\,\frac{\frac{p}{Pl}-\frac{\omega}{k}}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}}\,e^{-\frac{p}{Pl}(\zeta-l)} - 2\,\frac{\omega^2 r}{k^2}\,\frac{1}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}}\,e^{-\frac{p}{Pl}(\zeta-2l)}. \end{aligned}\right.$$

On aurait ensuite les valeurs de

$$f(\zeta)\binom{3l}{4l}, \qquad f(\zeta)\binom{4l}{5l}, \qquad f(\zeta)\binom{5l}{6l}\cdots$$

Ayant $f(\zeta)$, on en déduit $F(-\zeta)$ suivant la règle ordinaire, par l'équation (77).

Je vais donner deux exemples des valeurs de u fournies par ces fonctions.

Supposons d'abord que

$$x - kt < 0$$

et que

$$x + kt \quad \text{et} \quad kt - x$$

soient deux quantités comprises entre l et $2l$. C'est alors la formule (84) qui doit servir, et l'on trouve, après quelques réductions faciles,

$$(88)\quad \left\{\begin{aligned} & u = x + r - r\cos\frac{\omega}{k}(kt - x) \\ & + 2\frac{Gg}{Pk\omega}\,\frac{\frac{p}{Pl}\cos\frac{\omega}{k}(kt-l) + \frac{\omega}{k}\sin\frac{\omega}{k}(kt-l)}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}}\sin\frac{\omega x}{k} \\ & - \frac{G}{E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\,\frac{\frac{p}{Pl} - \frac{\omega}{k}}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}}\,e^{-\frac{p}{Pl}(kt-l)}\left(e^{\frac{p}{Pl}x} - e^{-\frac{p}{Pl}x}\right). \end{aligned}\right.$$

Cette formule doit convenir à l'origine de la tige, car, pour $x = 0$, la différence entre $x + kt$ et $kt - x$ est nulle, et, par conséquent, ces quantités peuvent être comprises toutes deux ensemble entre l et $2l$. Dès lors, l'équation (88) doit satisfaire à la condition relative à l'origine de la tige, et, en effet, si l'on y fait $x = 0$, on a

$$u = r - r\cos\omega t,$$

c'est-à-dire qu'on satisfait à l'équation (72).

Pour le second exemple, je suppose encore $x < kt$. Puis j'admets que $x + kt$ soit compris entre $2l$ et $3l$ et que $kt - x$ le soit entre 0 et l, ce qui est admissible puisque la différence entre $x + kt$ et $kt - x$ est $2x$ qui peut aller jusqu'à $2l$. Dans ce cas, il faut faire usage, pour $f(\zeta)$, de la formule (87), et quant à $F(x - kt)$ ou $F(-\zeta)$, sa valeur très-simple se déduit de $f(\zeta)\left(\frac{0}{l}\right)$. On a alors

$$
(89)\quad \left\{
\begin{aligned}
u &= x + 2r - r\cos\frac{\omega}{k}(kt - x) \\
&+ r\,\frac{\left[\frac{\omega^2}{k^2} - \left(\frac{p}{Pl}\right)^2\right]\cos\frac{\omega}{k}(x + kt - 2l) - 2\frac{\omega}{k}\frac{p}{Pl}\sin\frac{\omega}{k}(x + kt - 2l)}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}} \\
&+ \frac{Ggl}{pk\omega}\sin\frac{\pi}{4} + \frac{Gg}{Pk\omega}\sin\frac{\pi}{4} \\
&\quad\times\frac{\left(\frac{p}{Pl} - \frac{\omega}{k}\right)\sin\frac{\omega}{k}(x + kt - l) - \left(\frac{p}{Pl} + \frac{\omega}{k}\right)\cos\frac{\omega}{k}(x + kt - l)}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}} \\
&+ \frac{G}{E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\,\frac{\frac{p}{Pl} - \frac{\omega}{k}}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}}\,e^{-\frac{p}{Pl}(x+kt-l)} - 2\frac{\omega^2 r}{k^2} \\
&\quad\times\frac{1}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}}\,e^{-\frac{p}{Pl}(x+kt-2l)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour $x = l$, la différence entre $x + kt$ et $kt - x$ est $2l$. Donc, la formule (89) doit satisfaire à la relation (76) relative à l'extrémité de la tige, et c'est en effet ce qui a lieu.

Il est intéressant de considérer le mouvement de l'extrémité de la tige au commencement du temps. Or, si kt est compris entre 0 et l, il arrive que, pour $x = l$, $x + kt$ est compris entre l et $2l$ et que $x - kt$ l'est entre 0 et l. D'après cela, on a alors

$$
(90)\quad \left\{
\begin{aligned}
u &= x + \frac{Ggl}{pk\omega}\sin\frac{\pi}{4} + \frac{Gg}{Pk\omega}\sin\frac{\pi}{4} \\
&\quad\times\frac{\left(\frac{p}{Pl} - \frac{\omega}{k}\right)\sin\frac{\omega}{k}(x + kt - l) - \left(\frac{p}{Pl} + \frac{\omega}{k}\right)\cos\frac{\omega}{k}(x + kt - l)}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}} \\
&+ \frac{G}{E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\,\frac{\frac{p}{Pl} - \frac{\omega}{k}}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}}\,e^{-\frac{p}{Pl}(x+kt-l)}.
\end{aligned}
\right.
$$

On vérifie aisément, à l'aide de cette formule, que, pour $x = l$ et $t = 0$, on a, ainsi que cela doit être,

$$u = l,$$
$$\frac{du}{dx} - 1 = 0,$$
$$\frac{du}{dt} = 0,$$

ce qui correspond à l'état initial donné. De plus, cette même formule (90) satisfait, même pour $t = 0$, à la condition (76), ce qui démontre, ainsi que je l'ai dit en commençant et comme du reste on pouvait le prévoir, que l'état initial choisi était compatible avec les conditions imposées aux extrémités.

PROBLÈME IV.

Il s'agit d'une manivelle. La question se pose de la manière suivante.

Une manivelle OM *tourne d'un mouvement uniforme autour de son origine* O, *qui est fixe. Une force, par exemple celle de la vapeur, agit sur son extrémité* M, *suivant une direction* MC, *parallèle à* AOB, *que je suppose constante. La loi de cette force est donnée et je la supposerai, pour fixer les idées, représentée, comme dans l'exemple précédent, par la formule*

$$(91) \qquad Q = G\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) = G\sin\frac{\pi}{4}(\cos\omega t + \sin\omega t).$$

En appelant Π la projection de cette force sur la direction OM, on a

$$\Pi = G\sin\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega t)\right].$$

Les conditions imposées aux extrémités de la tige sont donc : 1° pour $x = 0$,

$$(92) \qquad u = 0,$$

et 2° pour $x = l$,

$$(93) \quad \frac{du}{dx} = 1 - \frac{G}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4} - \frac{G}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\cos(2\omega t) - \frac{G}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\sin(2\omega t).$$

Si l'on veut tenir compte de la force centrifuge des diverses parties de la manivelle, l'équation aux différences partielles ne se présente pas tout à fait sous la forme ordinaire; mais il est facile de l'y ramener.

En effet, on a, dans ce cas,

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \omega^2 x + k^2 \frac{d^2 u}{dx^2}. \tag{94}$$

Appelons u_1 ce que serait u si toutes les parties de la manivelle étaient en équilibre sous l'action de la force centrifuge et de l'élasticité et qu'il n'y eût aucune force appliquée à l'extrémité de la manivelle.

On a alors

$$\omega^2 x + k^2 \frac{d^2 u_1}{dx^2} = 0, \tag{95}$$

et l'on trouve aisément

$$u_1 = \left(1 + \frac{\omega^2 l^2}{2k^2}\right) x - \frac{\omega^2 x^3}{6k^2}. \tag{96}$$

Posons maintenant

$$u = u_1 + U, \tag{97}$$

et il reste à déterminer U.

On a d'abord

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = k^2 \frac{d^2 U}{dx^2}. \tag{98}$$

Les conditions (92) et (93), relatives aux extrémités, deviennent pour U : 1° pour $x = 0$,

$$U = 0, \tag{99}$$

et 2° pour $x = l$,

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{G}{2E\sigma} \sin\frac{\pi}{4} - \frac{G}{2E\sigma} \sin\frac{\pi}{4}\cos(2\omega t) - \frac{G}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\sin(2\omega t). \tag{100}$$

Il reste à fixer l'état initial. Or, j'admettrai que, à l'origine du temps, la vitesse de tous les points de la manivelle soit nulle et que toutes ses parties soient en équilibre sous l'action des forces agissantes qui sont : d'une part, les forces centrifuges, et d'autre part, à l'extrémité de la tige, la force H qui a alors pour valeur $G\sin\frac{\pi}{4}$. Cet état est évidemment compatible avec les autres conditions données et l'on trouve facilement, pour $t=0$,

$$u=\left(1+\frac{\omega^2 l^2}{2k^2}-\frac{G}{E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\right)x-\frac{\omega^2 x^3}{6k^2}\quad \text{et}\quad \frac{du}{dt}=0.$$

Donc, comme $U=u-u_1$, si l'on appelle respectivement $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ les valeurs données de U et de $\frac{dU}{dt}$ pour $t=0$, on a

$$\varphi(x)=-\left(\frac{G}{E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\right)x \tag{101}$$

et

$$\psi(x)=0. \tag{102}$$

La méthode générale s'applique maintenant. Il est inutile de répéter tous les calculs. Voici les principaux résultats qu'on obtient successivement, en faisant, comme toujours, $kt=\zeta$:

$$f(\zeta)\binom{0}{l}=F(\zeta)\binom{0}{l}=-\left(\frac{G}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\right)\zeta; \tag{103}$$

puis on a

$$\left\{\begin{aligned} f(\zeta)\binom{l}{3l}=&-\frac{Gl}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}-\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{2\omega}{k}(\zeta-l)-\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\\ &+\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\omega}{k}(\zeta-l),\end{aligned}\right. \tag{104}$$

$$\left\{\begin{aligned} f(\zeta)\binom{3l}{5l}=&\frac{2Gl}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}-\left(\frac{G}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\right)\zeta-\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{2\omega}{k}(\zeta-l)\\ &+\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{2\omega}{k}(\zeta-3l)-\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\\ &+\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\omega}{k}(\zeta-l)+\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\\ &-\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\omega}{k}(\zeta-3l),\end{aligned}\right. \tag{105}$$

. . . .

ou, d'une manière générale et en réduisant, on a, pour tout nombre entier i supérieur ou égal à o,

$$(106)\quad \left\{\begin{aligned} f(\zeta)\begin{pmatrix}4il+l\\4il+3l\end{pmatrix} = &-\frac{(2i+1)}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4} - \frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\frac{\cos\frac{(2i+1)2\omega l}{k}\sin\frac{2\omega}{k}(\zeta-2il-l)}{\cos\frac{2\omega l}{k}}\\ &-\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4} + \frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\frac{\cos\frac{(2i+1)2\omega l}{k}\cos\frac{2\omega}{h}(\zeta-2il-l)}{\cos\frac{2\omega l}{k}}, \end{aligned}\right.$$

et, pour tout entier i supérieur à o,

$$(107)\quad \left\{\begin{aligned} f(\zeta)\begin{pmatrix}4il-l\\4il+l\end{pmatrix} = &\frac{2iGl}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4} - \left(\frac{G}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\right)\zeta\\ &-\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\frac{\sin\frac{4il\omega}{k}\cos\frac{2\omega}{k}(\zeta-2il)}{\cos\frac{2\omega l}{k}}\\ &-\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\frac{\sin\frac{4il\omega}{k}\sin\frac{2\omega}{k}(\zeta-2il)}{\cos\frac{2\omega l}{k}}. \end{aligned}\right.$$

On aura ensuite, pour tout entier i supérieur ou égal à o,

$$(108)\quad \left\{\begin{aligned} F(-\zeta)\begin{pmatrix}4il+l\\4il+3l\end{pmatrix} = &\frac{(2i+1)Gl}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\\ &+\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\frac{\cos\frac{(2i+1)2\omega l}{k}\sin\frac{2\omega}{k}(\zeta-2il-l)}{\cos\frac{2\omega l}{k}}\\ &+\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\\ &-\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\frac{\cos\frac{(2i+1)2\omega l}{k}\cos\frac{2\omega}{k}(\zeta-2il-l)}{\cos\frac{2\omega l}{k}}, \end{aligned}\right.$$

et, pour tout entier i, supérieur à o,

$$
(109)\quad \left\{
\begin{aligned}
F(-\zeta)\binom{4il-l}{4il+l} = {} & -\frac{2iGl}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4} + \left(\frac{G}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\right)\zeta \\
& + \frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\,\frac{\sin\dfrac{4il\omega}{k}\cos\dfrac{2\omega}{k}(\zeta-2il)}{\cos\dfrac{2\omega l}{k}} \\
& + \frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\,\frac{\sin\dfrac{4il\omega}{k}\sin\dfrac{2\omega}{k}(\zeta-2il)}{\cos\dfrac{2\omega l}{k}}.
\end{aligned}
\right.
$$

A l'aide de ces formules et de la relation (97), on formera maintenant sans difficulté la valeur de u, pour toutes les valeurs possibles de x et de t. Il peut se présenter quatre cas généraux :

1° Si

$$4il+l < x+kt < 4il+3l$$

et

$$4il+l < kt-x < 4il+3l,$$

on aura

$$
(110)\quad \left\{
\begin{aligned}
u = {} & \left(1+\frac{\omega^2 l^2}{2k^2}\right)x - \frac{\omega^2 x^3}{6k^2} \\
& - \frac{G}{2E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\,\frac{\cos\dfrac{(2i+1)2\omega l}{k}\left[\cos\dfrac{2\omega}{k}(k-2il-l)+\sin\dfrac{2\omega}{k}(kt-2il-l)\right]\sin\dfrac{2\omega x}{k}}{\cos\dfrac{2\omega l}{k}}.
\end{aligned}
\right.
$$

2° Si

$$4il+l < x+kt < 4il+3l \quad \text{et que} \quad 4il-l < kt-x < 4il+l,$$

on aura

$$
(111)\quad \left\{
\begin{aligned}
u = {} & \left(1+\frac{\omega^2 l^2}{2k^2}\right)x - \frac{\omega^2 x^3}{6k^2} - \frac{(4i+1)Gl}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4} \\
& + \left(\frac{G}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\right)(kt-x) - \frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4} - \frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4} \\
& \times \frac{[\cos(2\omega t)+\sin(2\omega t)]\sin\dfrac{2\omega x}{k} + \left[\sin\dfrac{2\omega}{k}(kt-4il-l)-\cos\dfrac{2\omega}{k}(kt-4il-l)\right]\cos\dfrac{2\omega}{k}(l-x)}{\cos\dfrac{2\omega l}{k}}.
\end{aligned}
\right.
$$

3° Si

$$4il - l < x + kt < 4il + l$$

et

$$4il - l < kt - x < 4il + l,$$

on aura

$$(112)\quad \begin{cases} u = \left(1 + \dfrac{\omega^2 l^2}{2k^2}\right) x - \dfrac{\omega^2 x^3}{6k^2} - \left(\dfrac{G}{E\sigma} \sin\dfrac{\pi}{4}\right) x \\[2ex] \quad + \dfrac{G}{2E\sigma}\dfrac{k}{\omega}\sin\dfrac{\pi}{4}\dfrac{\sin\dfrac{4il\omega}{k}\left[\sin\dfrac{2\omega}{k}(kt - 2il) - \cos\dfrac{2\omega}{k}(kt - 2il)\right]\sin\dfrac{2\omega x}{k}}{\cos\dfrac{2\omega l}{k}}. \end{cases}$$

Et 4° enfin, si

$$4il - l < x + kt < 4il + l \quad \text{et que} \quad 4il - 3l < kt - x < 4il - l,$$

on aura

$$(113)\quad \begin{cases} u = \left(1 + \dfrac{\omega^2 l^2}{2k^2}\right) x - \dfrac{\omega^2 x^3}{6k^2} + \dfrac{(4i - 1)Gl}{2E\sigma} \sin\dfrac{\pi}{4} \\[2ex] - \left(\dfrac{G}{2E\sigma}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)(x + kt) + \dfrac{G}{4E\sigma}\dfrac{k}{\omega}\sin\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{G}{4E\sigma}\dfrac{k}{\omega}\sin\dfrac{\pi}{4} \\[2ex] \times \dfrac{[\cos(2\omega t) + \sin(2\omega t)]\sin\dfrac{2\omega x}{k} + \left[\cos\dfrac{2\omega}{k}(kt - 4il + l) - \sin\dfrac{2\omega}{k}(kt - 4il + l)\right]\cos\dfrac{2\omega}{k}(l - x)}{\cos\dfrac{2\omega l}{k}}. \end{cases}$$

Les formules (110) et (112) conviennent évidemment à l'origine de la tige, puisque, pour $x = 0$, la différence entre $x + kt$ et $kt - x$ est nulle. Et, en effet, elles donnent toutes deux $u = 0$ pour $x = 0$. Pour une raison semblable, les formules (111) et (113) conviennent à l'extrémité de la tige et il est facile de s'assurer qu'elles satisfont toutes deux à la condition (93) imposée pour cette extrémité.

On formerait de même très-facilement, à l'aide des formules qui précèdent, les valeurs de u pour les premiers instants du phénomène, alors que $x + kt$ et $kt - x$ ne sont pas deux quantités chacune supérieure à l.

Au moyen des valeurs de u, on obtient ensuite immédiatement celles de $\frac{du}{dt}$ et de $\frac{du}{dx} - 1$, c'est-à-dire les vitesses et les allongements proportionnels.

PROBLÈME V.

Il s'agit des vibrations transversales d'une corde tendue. Celle-ci étant en repos et son origine maintenue fixe, on soumet son extrémité à un mouvement alternatif et l'on demande le mouvement vibratoire qui en résultera pour la corde.

On sait que l'équation aux différences partielles est

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2y}{dx^2} \tag{114}$$

ou

$$a^2 = \frac{glT}{p},$$

en appelant p le poids et l la longueur de la corde. De plus, T est sa tension. En désignant par α l'allongement proportionnel correspondant à cette tension, on a, en conservant les notations antérieures,

$$T = E\sigma\alpha$$

et

$$a^2 = \frac{Eg\alpha}{\varpi}. \tag{115}$$

On a ici, pour l'état initial,

$$[\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0], \tag{116}$$

et pour les extrémités, quel que soit t,

$$(y)_{x=0} = 0 \tag{117}$$

et

$$(y)_{x=l} = r - r\cos\omega t. \tag{118}$$

Les calculs se faisant toujours de la même manière, je me borne à mentionner les résultats.

En faisant $at = \zeta$, on a

$$f(\zeta)\binom{0}{l} = \mathrm{F}(\zeta)\binom{0}{l} = 0,$$

$$f(\zeta)\binom{l}{3l} = r - r\cos\frac{\omega}{a}(\zeta - l),$$

$$f(\zeta)\binom{3l}{5l} = r - r\cos\frac{\omega}{a}(\zeta - l) + r - r\cos\frac{\omega}{a}(\zeta - 3l),$$

$$f(\zeta)\binom{5l}{7l} = r - r\cos\frac{\omega}{a}(\zeta - l) + r - r\cos\frac{\omega}{a}(\zeta - 3l) + r - r\cos\frac{\omega}{a}(\zeta - 5l),$$

et ainsi de suite; ou, d'une manière générale, pour tout entier $i > 0$,

$$f(\zeta)\binom{2il - l}{2il + l} = ir - r\frac{\sin\frac{il\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}(\zeta - il)}{\sin\frac{\omega l}{a}} \tag{119}$$

et

$$\mathrm{F}(-\zeta)\binom{2il - l}{2il + l} = -ir + r\frac{\sin\frac{il\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}(\zeta - il)}{\sin\frac{\omega l}{a}}. \tag{120}$$

A l'aide de ces formules, on obtient immédiatement y.

Il peut se présenter deux cas.

Premier cas :

$$2il - l < x + at < 2il + l$$

et

$$2il - l < at - x < 2il + l.$$

On a alors

$$y = r\frac{\sin\frac{2i\omega l}{a}\sin\omega t - \left(1 - \cos\frac{2i\omega l}{a}\right)\cos\omega t}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega x}{a}. \tag{121}$$

Pour $x = 0$, la différence entre $x + at$ et $at - x$ étant nulle, la formule (121) doit toujours convenir à l'origine de la corde et, en effet, elle donne bien, pour $x = 0$,

$$y = 0, \quad \text{quel que soit } t.$$

Deuxième cas :

$$2il - l < x + at < 2il + l$$

et

$$2il - 3l < at - x < 2il - l.$$

On a alors

$$(122)\qquad y = r - r\frac{\cos\omega t \sin\frac{\omega x}{a} + \cos\frac{\omega}{a}(at - 2il + l)\sin\frac{\omega}{a}(l - x)}{\sin\frac{\omega l}{a}}.$$

Cette formule doit toujours convenir à l'extrémité de la corde, puisque, pour $x = l$, la différence entre $x + at$ et $at - x$ est $2l$. Et en effet, pour $x = l$, elle donne $y = r - r\cos\omega t$.

Dans certaines conditions intéressantes à examiner, le mouvement vibratoire de la corde devient isochrone.

Supposons d'abord

$$(123)\qquad \sin\frac{\omega l}{a} = +1$$

et

$$(124)\qquad \frac{\omega l}{a} = \frac{\pi}{2}.$$

Dans ce cas la formule (121) devient, pour i pair,

$$(125)\qquad y = 0,$$

et pour i impair

$$(126)\qquad y = -2r\cos\omega t \sin\frac{\omega x}{a}.$$

En même temps la formule (122) donne, pour i pair,

$$(127)\qquad y = r + r\sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{a}\right),$$

et pour i impair,

$$(128)\qquad y = r - r\sin\left(\omega t + \frac{\omega x}{a}\right).$$

Les quatre formules (125), (126), (127), (128) ne contiennent plus i. Mais pour un même point x, la même formule revient chaque fois que at a augmenté de $4l$, car alors le nombre i a augmenté de deux unités et redevient pair s'il était pair, ou impair s'il était impair, et les quantités $x + at$ et $at - x$ sont de nouveau comprises chacune entre des limites de même forme qu'auparavant. Or, si at augmente de $4l$, ωt augmente de $\frac{4\omega l}{a}$, ou de 2π à cause de la formule (124). Mais en même temps on voit que les quatre formules (125), (126), (127), (128) ne changent pas quand ωt s'accroît de 2π. Ainsi donc chaque point de la corde exécute des vibrations isochrones dont la durée est

$$\theta = \frac{2\pi}{\omega} \tag{129}$$

ou

$$\theta = \frac{4l}{a}, \tag{130}$$

soit un temps double des vibrations isochrones que ferait la corde supposée fixe à ses deux extrémités.

Mais il faut pour cela que la vitesse angulaire ω soit celle qui résulte de (124). Si l'on appelle N le nombre de vibrations par seconde, lequel sera celui imprimé à l'extrémité de la corde, on devra avoir

$$N = \frac{a}{4l}. \tag{131}$$

Par exemple, s'il s'agissait d'un fil de fer ou d'acier tendu par une force correspondant à un allongement proportionnel de 0,0016, on aurait

$$N = \frac{200}{4l};$$

et si on avait $l = 0^{m},50$, on aurait $N = 100$, ce qui indiquerait la hauteur du son correspondant.

Ce problème présente d'autres particularités intéressantes. Par exemple, si

$$\sin\frac{\omega l}{a} = +1,$$

mais que $\frac{\omega l}{a}$ soit supérieur à $\frac{\pi}{2}$, on aura toujours les mêmes formules (125), (126), (127) et (128), c'est-à-dire que y sera toujours périodique, mais à des intervalles ne correspondant plus à $\theta = \frac{2\pi}{\omega}$.

La même chose aura lieu, si

$$\sin \frac{\omega l}{a} = -1.$$

Dans ce cas, les formules, très-faciles à obtenir, sont tout à fait analogues à (125), (126), (127) et (128).

Enfin, on peut considérer le cas où

$$\sin \frac{\omega l}{a} = 0,$$

c'est-à-dire où $\frac{\omega l}{a}$ est un multiple de π. Dans ce cas, les deux formules générales (121) et (122) se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. Mais il est facile d'obtenir leur vraie valeur qui est, pour l'équation (121),

$$(132) \qquad y = 2ir \frac{\sin \omega t \sin \frac{\omega x}{a}}{\cos \frac{\omega l}{a}},$$

et pour la formule (122),

$$(133) \qquad y = r - r \frac{\cos \omega t \cos \frac{\omega x}{a} - (2i - 1) \sin \omega t \sin \frac{\omega x}{a}}{\cos \frac{\omega l}{a}}.$$

On voit qu'alors les valeurs de y ne sont plus soumises à la périodicité et qu'elles tendraient à croître indéfiniment avec i.

PROBLÈME VI.

On peut encore traiter le problème précédent avec des données différentes.

Ainsi, par exemple, au lieu que l'origine de la corde soit fixe, on peut la soumettre au même mouvement que l'extrémité, de sorte que, pour $x=0$ comme pour $x=l$, on ait

$$y=r-r\cos\omega t.$$

On obtient alors les quatre formules types suivantes, pour tout entier i :

$$(134)\qquad f(\zeta)\binom{2il-l}{2il}=r-r\frac{\cos\frac{(2i-1)\omega l}{2a}\cos\frac{\omega}{a}(\zeta-il)}{\cos\frac{\omega l}{2a}},$$

$$(135)\qquad f(\zeta)\binom{2il}{2il+l}=r\frac{\sin\frac{i\omega l}{a}\sin\frac{\omega}{a}\left(\zeta-il-\frac{l}{2}\right)}{\cos\frac{\omega l}{2a}},$$

$$(136)\qquad F(-\zeta)\binom{2il-l}{2il}=r\frac{\sin\frac{i\omega l}{a}\sin\frac{\omega}{a}\left(\zeta-il+\frac{l}{2}\right)}{\cos\frac{\omega l}{2a}},$$

$$(137)\qquad F(-\zeta)\binom{2il}{2il+l}=r-r\frac{\cos\frac{(2i+1)\omega l}{2a}\cos\frac{\omega}{a}(\zeta-il)}{\cos\frac{\omega l}{2a}}.$$

A l'aide de ces quatre types, on forme la valeur de y pour toutes celles de x et de t. On se rend compte aisément qu'il peut y avoir six combinaisons de ces formules.

On reconnaît aussi que, quand $\cos\frac{\omega l}{2a}=\pm 1$, c'est-à-dire quand $\frac{\omega l}{a}$ est un multiple de 2π, la valeur de y est périodique, et que, quand $\cos\frac{\omega l}{2a}=0$ ou que, quand $\frac{\omega l}{a}$ est un multiple impair de π, la valeur de y tend à croître indéfiniment.

PROBLÈME VII.

On peut encore changer les données du problème précédent de la manière suivante :

On suppose que, pour $x = 0$, on ait

$$y = -r + r\cos\omega t,$$

et que, pour $x = l$, on ait

$$y = r - r\cos\omega t.$$

Alors les deux extrémités du fil ont à chaque instant un mouvement inverse.

Voici quels sont les résultats auxquels on parvient. Il y a trois cas.

Premier cas :

$$il < x + at < il + l$$

et

$$il < at - x < il + l.$$

On a alors

$$(138) \qquad y = -r + r\,\frac{\cos\dfrac{\omega}{2a}(2at - 2il - l)\sin\dfrac{\omega x}{a} - \cos\omega t\sin\dfrac{\omega}{2a}(2x - l)}{\sin\dfrac{\omega l}{2a}}.$$

Deuxième cas :

$$il < x + at < il + l,$$
$$il - l < at - x < il.$$

On a

$$(139) \qquad y = 2r\,\frac{\sin\dfrac{i\omega l}{2a}\sin\dfrac{\omega}{2a}(2at - il)\sin\dfrac{\omega}{2a}(2x - l)}{\sin\dfrac{\omega l}{2a}}.$$

Troisième cas :

$$il < x + at < il + l,$$
$$il - 2l < at - x < il - l.$$

On a

$$(140) \qquad y = r - r\,\frac{\cos\dfrac{\omega}{2a}(2at - 2il + l)\sin\dfrac{\omega}{a}(l - x) + \cos\omega t\sin\dfrac{\omega}{2a}(2x - l)}{\sin\dfrac{\omega l}{2a}}.$$

L'origine de la corde qui répond à $x = 0$ correspond toujours à l'équation (138). Et en effet, si l'on fait, dans cette dernière formule, $x = 0$, on a

$$y = -r + r\cos\omega t.$$

De même, l'extrémité de la corde répond toujours à l'équation (140). Or, si l'on y fait $x = l$, on a, comme comme cela devait être,

$$y = r - r\cos\omega t.$$

Par une raison semblable, le milieu du fil répond toujours à l'équation (139). Or, si l'on fait $x = \frac{l}{2}$ dans cette formule, on a $y = 0$, quel que soit t, ce qui montre que, dans ces circonstances, le milieu de la corde reste en repos pendant tout le mouvement.

CHAPITRE II.

Le principe du deuxième procédé que j'ai appliqué est de ramener la question au cas où les conditions imposées aux extrémités des corps sont invariables, au lieu d'être des fonctions du temps, problème que l'on résout ensuite par les méthodes ordinaires. Il suppose seulement que les fonctions dont il s'agit sont d'une certaine forme, mais qui se trouve être précisément celle que l'on rencontre le plus ordinairement dans les applications.

Soit d'abord l'équation déja examinée dans le premier chapitre, et qui est le type de l'équation des cordes vibrantes ou des mouvements longitudinaux des tiges,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = k^2\frac{d^2u}{dx^2}. \tag{1}$$

Je fais

$$u = u_1 + U, \tag{2}$$

et je me propose de déterminer u_1 de telle manière que, dans les équations de condition relatives aux extrémités, cette fonction u_1 fasse disparaître les fonctions du temps dont il s'agit. Alors la recherche de U sera ramenée au problème ordinaire, c'est-à-dire que pour U les conditions relatives aux extrémités seront invariables, et U devra en outre satisfaire à l'état initial modifié par u_1.

Supposons que les fonctions arbitraires du temps dont il s'agit ne contiennent que des termes périodiques. C'est bien, en effet, ce qui arrive presque toujours dans les applications, particulièrement dans les machines. Soit, par exemple,

$$I \sin \omega t$$

l'un de ces termes, entrant dans l'une quelconque des équations de condition, I et ω étant deux constantes.

J'introduirai, en conséquence, dans la valeur de u_1, une expression correspondante telle que

$$\left(A_1 \sin \frac{\omega x}{k} + B_1 \cos \frac{\omega x}{k}\right) \sin \omega t,$$

qui satisfait d'elle-même à l'équation (1) et qui contient deux constantes indéterminées A_1 et B_1. J'en fais autant pour chaque terme périodique entrant dans l'une ou l'autre des équations relatives aux extrémités, de sorte que u_1 contiendra deux fois autant de constantes indéterminées qu'il y a de ces termes dans l'une ou l'autre des équations de condition, et, comme ces dernières, d'après la nature de l'équation (1), sont elles-mêmes au nombre de deux, on aura précisément le nombre d'équations nécessaire pour déterminer toutes les constantes A_1, B_1, etc., en égalant séparément à zéro tous les facteurs des termes périodiques qui se trouveront dans les équations de condition, lorsqu'on y aura substitué u_1 pour u.

S'il se trouvait dans les équations de condition des termes constants ou proportionnels à la première ou à la deuxième puissance de t, on les fera disparaître par une simple adjonction à u_1, comme on le verra dans les exemples qui suivent.

S'il entrait dans l'expression des fonctions du temps données des termes en exponentielles, on les ferait disparaître de même.

Soit maintenant l'équation aux différences partielles qui régit les vibrations transversales des verges, et qui est

$$(3) \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = - k^2 \frac{d^4 y}{dx^4},$$

où k^2 est un nombre généralement très-grand dont la valeur est

$$k^2 = \frac{Mg}{\varpi},$$

M étant le moment d'élasticité, ϖ le poids de l'unité de volume de la verge et g la gravité.

On fera encore

$$y = y_1 + Y, \tag{4}$$

et il faudra que y_1 soit déterminé de manière à faire disparaître les fonctions du temps des équations de condition qui, dans ce genre de question, sont toujours au nombre de quatre.

Ici, il faut que, à part les termes constants et proportionnels à la première ou à la deuxième puissance de t, les équations de condition ne renferment que des termes périodiques, et c'est bien ainsi, en effet, que cela se présente dans les applications.

Soit donc, par exemple,

$$I \cos \omega t$$

l'un de ces termes; on introduira, dans la valeur de y, une expression correspondante

$$\left[A_1 \sin \sqrt{\frac{\omega}{k}}\,x + B_1 \cos \sqrt{\frac{\omega}{k}}\,x + C_1 \frac{e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}}x} - e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}}x}}{2} + D_1 \frac{e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}}x} + e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}}x}}{2}\right] \cos \omega t,$$

laquelle satisfait à l'équation (3) et qui renferme quatre coefficients indéterminés

$$A_1,\ B_1,\ C_1 \text{ et } D_1.$$

On en fera autant pour tout terme périodique introduit dans l'une ou l'autre des quatre équations de condition par les fonctions arbitraires, et l'on voit qu'on pourra déterminer par de simples équations du premier degré tous ces coefficients A_1, B_1, C_1, D_1, etc., de manière à faire disparaître des équations relatives aux extrémités tout ce qui dépend du temps.

PROBLÈME I.

Déterminer le mouvement d'une tige douée d'un mouvement dans le sens de sa longueur.

L'origine a un mouvement alternatif donné et l'extrémité est libre.

On a, en conservant les notations du premier chapitre,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = k^2\frac{d^2u}{dx^2}, \tag{1}$$

$$(u)_{x=0} = r - r\cos\omega t, \tag{2}$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=l} = 1. \tag{3}$$

Puis l'état initial donné est

$$(u)_{t=0} = x, \tag{4}$$

et

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0} = 0. \tag{5}$$

On se rappelle que ce problème a été traité différemment dans le premier chapitre.

Posons

$$u = u_1 + \mathrm{U}, \tag{6}$$

et soit

$$u_1 = \mathrm{M} + \mathrm{N}x + \left(\mathrm{A}_1\sin\frac{\omega x}{k} + \mathrm{B}_1\cos\frac{\omega x}{k}\right)\cos\omega t, \tag{7}$$

M, N, A_1 et B_1 étant des coefficients à déterminer.

Je substitue cette valeur de u_1 à la place de u dans l'équation (2) et dans l'équation (3), et j'ai

$$\mathrm{M} + \mathrm{B}_1\cos\omega t = r - r\cos\omega t,$$

$$\mathrm{N} + \frac{\omega}{k}\left(\mathrm{A}_1\cos\frac{\omega l}{k} - \mathrm{B}_1\sin\frac{\omega l}{k}\right)\cos\omega t = 1,$$

relations auxquelles on satisfait identiquement en faisant

$$M = r, \quad N = 1,$$

$$A_1 = -r\frac{\sin\frac{\omega l}{k}}{\cos\frac{\omega l}{k}} \quad \text{et} \quad B_1 = -r.$$

La valeur de u_1 est donc

$$(8) \qquad u_1 = x + r - r\frac{\cos\frac{\omega}{k}(l-x)\cos\omega t}{\cos\frac{\omega l}{k}}.$$

On aura maintenant, pour déterminer U, les équations suivantes

$$(9) \qquad \frac{d^2U}{dt^2} = k^2\frac{d^2U}{dx^2},$$

$$(10) \qquad (U)_{x=0} = 0,$$

$$(11) \qquad \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=l} = 0,$$

et pour l'état initial,

$$(12) \qquad (U)_{t=0} = \varphi(x)$$

et

$$(13) \qquad \left(\frac{dU}{dt}\right)_{t=0} = \psi(x),$$

où

$$\varphi(x) = x - (u_1)_{t=0} \quad \text{et} \quad \psi(x) = -\left(\frac{du_1}{dt}\right)_{t=0},$$

soit

$$(14) \qquad \varphi(x) = -r + r\frac{\cos\frac{\omega}{k}(l-x)}{\cos\frac{\omega l}{k}}$$

et

$$(15) \qquad \psi(x) = 0.$$

Or, U s'obtient par les méthodes connues. Posons

$$(16)\qquad U = \sum (A_m \sin mx \sin kmt + B_m \sin mx \cos kmt).$$

Je ne mets pas de termes multipliés par $\cos mx$, puisque, pour $x = 0$, on doit avoir $U = 0$, de sorte que la condition (10) est déjà satisfaite. On satisfait aussi à la condition (11) en déterminant m d'après l'équation

$$\cos ml = 0$$

ou

$$(17)\qquad m = \frac{(2i+1)\pi}{2l},$$

où i est un nombre entier quelconque, que l'on peut supposer positif.

Les coefficients A_m et B_m se déterminent par les procédés d'élimination connus, et en appelant A_i et B_i ce que sont ces coefficients pour chaque valeur de i, on trouve très-facilement

$$A_i = 0,$$
$$B_i = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{(2i+1)\pi x}{2l}\,dx.$$

On a donc, en résumé,

$$(18)\qquad \left\{ \begin{aligned} u &= x + r - r\frac{\cos\frac{\omega}{k}(l-x)\cos\omega t}{\cos\frac{\omega l}{k}} \\ &+ \frac{2}{l}\sum\left(\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{(2i+1)\pi x}{2l}\,dx\right)\sin\frac{(2i+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2i+1)\pi kt}{2l}, \end{aligned}\right.$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs i depuis 0 jusqu'à l'infini.

Même exemple que le précédent, sauf que l'origine de la tige, au lieu de recevoir un mouvement alternatif, a un mouvement uniformément varié.

Les calculs étant très-simples, je me borne à énoncer les résultats, qui sont

$$(19)\qquad u_1 = \frac{1}{2}\gamma t^2 + \left(1 + \frac{\gamma l}{k^2}\right)x - \frac{\gamma x^2}{2k^2}$$

et

$$(20)\qquad U=\frac{2}{l}\sum\left(\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{(2i+1)\pi x}{2l}\,dx\right)\sin\frac{(2i+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2i+1)\pi kt}{2l},$$

avec

$$\varphi(x)=\frac{\gamma l}{k^2}x-\frac{\gamma x^2}{2k^2}.$$

γ est l'accélération du mouvement de l'origine de la tige, de sorte que, pour $x=0$, on a, quel que soit t,

$$u=\frac{1}{2}\gamma t^2.$$

On a, d'ailleurs, pour toutes les valeurs de x et de t,

$$u=u_1+U.$$

PROBLÈME II.

Déterminer le mouvement d'une tige de piston dont l'origine a un mouvement alternatif et dont l'extrémité reçoit par l'intermédiaire d'un piston l'action de la vapeur.

Je conserve les mêmes notations que dans le chapitre Ier.

Les équations du problème sont

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2}=k^2\dfrac{d^2u}{dx^2}, \\ (u)_{t=0}=x,\quad \left(\dfrac{du}{dt}\right)_{t=0}=0, \\ (u)_{x=0}=r-r\cos\omega t, \\ \dfrac{P}{g}\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)_{x=l}+E\sigma\left(\dfrac{du}{dx}\right)_{x=l}=G\sin\dfrac{\pi}{4}(\cos\omega t+\sin\omega t)+E\sigma. \end{cases}$$

Soit

$$(22)\qquad u=u_1+U.$$

Faisons ici

$$(23)\quad \begin{cases} u_1 = \mathrm{M} + \mathrm{N}x + \left(\mathrm{A}_1 \sin\frac{\omega x}{k} + \mathrm{B}_1 \cos\frac{\omega x}{k}\right)\sin\omega t \\ \qquad + \left(\mathrm{C}_1 \sin\frac{\omega x}{k} + \mathrm{D}_1 \cos\frac{\omega x}{k}\right)\cos\omega t. \end{cases}$$

En substituant cette valeur de u_1 pour u dans les deux équations de condition relatives aux extrémités, nous avons :

$$(24)\quad \mathrm{M} + \mathrm{B}_1 \sin\omega t + \mathrm{D}_1 \cos\omega t = r - r\cos\omega t,$$

$$(25)\quad \begin{cases} -\frac{\mathrm{P}\omega^2}{g}\left(\mathrm{A}_1 \sin\frac{\omega l}{k} + \mathrm{B}_1 \cos\frac{\omega l}{k}\right)\sin\omega t \\ -\frac{\mathrm{P}\omega^2}{g}\left(\mathrm{C}_1 \sin\frac{\omega l}{k} + \mathrm{D}_1 \cos\frac{\omega l}{k}\right)\cos\omega t \\ + \mathrm{E}\sigma\mathrm{N} + \mathrm{E}\sigma\frac{\omega}{k}\left(\mathrm{A}_1 \cos\frac{\omega l}{k} - \mathrm{B}_1 \sin\frac{\omega l}{k}\right)\sin\omega t \\ + \mathrm{E}\sigma\frac{\omega}{k}\left(\mathrm{C}_1 \cos\frac{\omega l}{k} - \mathrm{D}_1 \sin\frac{\omega l}{k}\right)\cos\omega t \\ = \mathrm{E}\sigma + \mathrm{G}\sin\frac{\pi}{4}(\cos\omega t + \sin\omega t). \end{cases}$$

Or, on satisfait identiquement aux équations (24) et (25) par les valeurs suivantes des constantes

$$\mathrm{M} = r, \quad \mathrm{N} = 1,$$

$$\mathrm{A}_1 = \frac{\mathrm{G}\sin\frac{\pi}{4}}{\mathrm{E}\sigma\frac{\omega}{k}\cos\frac{\omega l}{k} - \frac{\mathrm{P}\omega^2}{g}\sin\frac{\omega l}{k}},$$

$$\mathrm{B}_1 = 0,$$

$$\mathrm{C}_1 = \frac{\mathrm{G}\sin\frac{\pi}{4} - r\left(\mathrm{E}\sigma\frac{\omega}{k}\sin\frac{\omega l}{k} + \frac{\mathrm{P}\omega^2}{g}\cos\frac{\omega l}{k}\right)}{\mathrm{E}\sigma\frac{\omega}{k}\cos\frac{\omega l}{k} - \frac{\mathrm{P}\omega^2}{g}\sin\frac{\omega l}{k}},$$

$$\mathrm{D}_1 = -r.$$

Il résulte de là que

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 = x + r + &\frac{G\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\omega x}{k}(\cos\omega t + \sin\omega t)}{E\sigma\frac{\omega}{k}\cos\frac{\omega l}{k} - \frac{P\omega^2}{g}\sin\frac{\omega l}{k}} \\ &- r\cos\omega t\,\frac{E\sigma\frac{\omega}{k}\cos\frac{\omega}{k}(l-x) - \frac{P\omega^2}{g}\sin\frac{\omega}{k}(l-x)}{E\sigma\frac{\omega}{k}\cos\frac{\omega l}{k} - \frac{P\omega^2}{g}\sin\frac{\omega l}{k}}. \end{aligned}\right.$$

On a maintenant pour déterminer U les équations suivantes :

$$(27)\qquad \frac{d^2U}{dt^2} = k^2\frac{d^2U}{dx^2},$$

$$(28)\qquad (U)_{x=0} = 0,$$

$$(29)\qquad \frac{P}{g}\left(\frac{d^2U}{dt^2}\right)_{x=l} + E\sigma\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=l} = 0,$$

$$(30)\qquad (U)_{t=0} = \varphi(x) = x - (u_1)_{t=0},$$

$$(31)\qquad \left(\frac{dU}{dt}\right)_{t=0} = \psi(x) = -\left(\frac{du_1}{dt}\right)_{t=0}.$$

On vérifiera l'équation (27) par une somme telle que

$$(32)\qquad U = \sum (A_m \sin mx \sin kmt + B_m \sin mx \cos kmt).$$

Je n'introduis pas de termes multipliés par $\cos mx$, afin de satisfaire tout d'abord à l'équation (28).

La condition (29) conduit ensuite à la relation

$$ml \sin ml = \frac{E\sigma g l}{P k^2}\cos ml,$$

ou, en appelant p le poids de la tige qui est égal à $\varpi\sigma l$, on a

$$(33)\qquad ml \,\mathrm{tang}\, ml = \frac{p}{P},$$

équation qui détermine les coefficients m.

En faisant $ml = \mu$, on a donc

$$\mu \operatorname{tang} \mu = \frac{p}{\mathrm{P}}. \tag{34}$$

On voit de suite qu'il y a une infinité de valeurs de μ : la première comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$; la deuxième entre π et $\pi + \frac{\pi}{2}$; la troisième entre 2π et $2\pi + \frac{\pi}{2}$, et ainsi de suite. On a donc

$$\mathrm{U} = \sum \left(\mathrm{A}_\mu \sin \frac{\mu x}{l} \sin \frac{k\mu t}{l} + \mathrm{B}_\mu \sin \frac{\mu x}{l} \cos \frac{k\mu t}{l} \right).$$

Les coefficients A_μ et B_μ se déterminent d'après l'état initial et par les méthodes d'élimination connues, en se fondant sur ce que, à cause de l'équation (34), on a toujours, pour deux valeurs différentes μ' et μ'' de μ, satisfaisant à l'équation (34),

$$\int_0^l \cos \frac{\mu' x}{l} \cos \frac{\mu'' x}{l} \, dx = 0,$$

relation qui n'a plus lieu quand $\mu' = \mu''$. On en conclut

$$\mathrm{A}_\mu = \frac{2l}{k\mu(\mu + \sin\mu \cos\mu)} \int_0^l \frac{d\psi(x)}{dx} \cos \frac{\mu x}{l} \, dx, \tag{35}$$

et

$$\mathrm{B}_\mu = \frac{2}{\mu + \sin\mu \cos\mu} \int_0^l \frac{d\varphi(x)}{dx} \cos \frac{\mu x}{l} \, dx. \tag{36}$$

En faisant les calculs, on trouve beaucoup de simplifications : d'une part, à cause de la relation (34), et ensuite en ayant égard à ce que

$$\mathrm{E}\sigma \frac{\omega}{k} \cos \frac{\omega l}{k} - \frac{\mathrm{P}\omega^2}{g} \sin \frac{\omega l}{k} = \frac{\mathrm{P}k\omega}{gl} \cos \frac{\omega l}{k} \left(\frac{p}{\mathrm{P}} - \frac{\omega l}{k} \operatorname{tang} \frac{\omega l}{k} \right).$$

On obtient enfin

$$\mathrm{A}_\mu = - \frac{2l^2 \mathrm{G} g \omega \sin \frac{\pi}{4}}{\mathrm{P}k^3} \frac{\cos\mu}{\mu(\mu + \sin\mu \cos\mu) \left[\mu^2 - \left(\frac{\omega l}{k} \right)^2 \right]}, \tag{37}$$

et

$$B_\mu = \frac{2l^2}{k^2}\frac{1}{(\mu + \sin\mu\cos\mu)\left[\mu^2 - \left(\frac{\omega l}{k}\right)^2\right]}\left(-\frac{Gg}{P}\sin\frac{\pi}{4}\cos\mu + \omega^2 r\right). \tag{38}$$

On a donc, en résumé, pour la solution cherchée,

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} u = x + r &+ \frac{G\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\omega x}{k}(\cos\omega t + \sin\omega t)}{E\sigma\frac{\omega}{k}\cos\frac{\omega l}{k} - \frac{P\omega^2}{g}\sin\frac{\omega l}{k}} \\ &- r\cos\omega t\,\frac{E\sigma\frac{\omega}{k}\cos\frac{\omega}{k}(l-x) - \frac{P\omega^2}{g}\sin\frac{\omega}{k}(l-x)}{E\sigma\frac{\omega}{k}\cos\frac{\omega l}{k} - \frac{P\omega^2}{g}\sin\frac{\omega l}{k}} \\ &- \frac{2l^3 Gg\omega\sin\frac{\pi}{4}}{Pk^3}\sum\frac{\cos\mu\sin\frac{\mu x}{l}\sin\frac{k\mu t}{l}}{\mu(\mu + \sin\mu\cos\mu)\left[\mu^2 - \left(\frac{\omega l}{k}\right)^2\right]} \\ &+ \frac{2l^2}{k^2}\sum\frac{\left(\omega^2 r - \frac{Gg}{P}\sin\frac{\pi}{4}\cos\mu\right)\sin\frac{\mu x}{l}\cos\frac{k\mu t}{l}}{(\mu + \sin\mu\cos\mu)\left[\mu^2 - \left(\frac{\omega l}{k}\right)^2\right]}. \end{aligned}\right.$$

PROBLÈME III.

Oscillations de la corde vibrante.

Les données sont

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2\frac{d^2y}{dx^2}, \tag{40}$$

$$[(y)_{x=0} = 0, \quad (y)_{x=l} = r - r\cos\omega t], \tag{41}$$

$$\left[(y)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = 0\right]. \tag{42}$$

Je fais

$$y = y_1 + Y, \tag{43}$$

et

$$y_1 = M + Nx + \left(A_1\sin\frac{\omega x}{a} + B_1\cos\frac{\omega x}{a}\right)\cos\omega t.$$

En substituant y_1 pour y dans les deux équations de condition (41), on en tire immédiatement

$$M = 0, \quad N = \frac{r}{l},$$

$$A_1 = -\frac{r}{\sin\frac{\omega l}{a}} \quad \text{et} \quad B_1 = 0.$$

On a donc

$$(44) \qquad y_1 = \frac{rx}{l} - \frac{r\sin\frac{\omega x}{a}\cos\omega t}{\sin\frac{\omega l}{a}}.$$

On a ensuite, pour déterminer Y, les équations

$$(45) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2 Y}{dt^2} = a^2 \dfrac{d^2 Y}{dx^2}, \\ (Y)_{x=0} = 0, \quad (Y)_{x=l} = 0, \\ (Y)_{t=0} = \varphi(x) = -(y_1)_{t=0}, \\ \left(\dfrac{dY}{dt}\right)_{t=0} = \psi(x) = -\left(\dfrac{dy_1}{dt}\right)_{t=0}. \end{array} \right.$$

On y satisfait par une expression

$$(46) \qquad Y = \sum \left(A_i \sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi at}{l} + B_i \sin\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i\pi at}{l} \right),$$

où les coefficients A_i et B_i se déterminent d'après l'état initial et par les méthodes d'élimination connues. On a

$$A_i = 0 \quad \text{et} \quad B_i = -2r\left(\frac{\omega l}{a}\right)^2 \frac{\cos i\pi}{i\pi\left[(i\pi)^2 - \left(\frac{\omega l}{a}\right)^2\right]},$$

et l'on a en résumé

$$(47) \qquad Y = \frac{rx}{l} - \frac{r\sin\frac{\omega x}{a}\cos\omega t}{\sin\frac{\omega l}{a}} - 2r\left(\frac{\omega l}{a}\right)^2 \sum \frac{\cos i\pi \sin\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i\pi at}{l}}{i\pi\left[(i\pi)^2 - \left(\frac{\omega l}{a}\right)^2\right]}.$$

PROBLÈME IV.

Je passe maintenant à un exemple relatif à un autre type d'équations aux différences partielles. Il s'agit ici de celle qui régit les vibrations transversales des verges élastiques.

Je suppose une barre, comme une bielle d'accouplement de machines locomotives, dont les deux extrémités reçoivent directement un même mouvement alternatif perpendiculairement à l'axe de la bielle. Il s'agit de déterminer les mouvements moléculaires de toutes les parties de cette bielle.

L'équation aux différences partielles est

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 \frac{d^4y}{dx^4}, \tag{48}$$

ou k^2 est un nombre très-grand dont la valeur est

$$k^2 = \frac{Mg}{\varpi},$$

M étant le moment d'élasticité de cette bielle, g la gravité et ϖ le poids de l'unité de volume de la matière.

Les conditions imposées aux extrémités sont

$$(y)_{x=0} = r \sin \omega t, \tag{49}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} = 0, \tag{50}$$

$$(y)_{x=l} = r \sin \omega t, \tag{51}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=l} = 0. \tag{52}$$

Les conditions (50) et (52) expriment qu'aux deux extrémités de la bielle, lesquelles ne sont pas encastrées, le rayon de courbure est infini.

Je suppose de plus qu'à l'origine du mouvement on ait

$$(y)_{t=0} = 0, \tag{53}$$

et

$$(54)\qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = \omega r.$$

Je ne suppose pas ici, comme dans les problèmes précédents, la vitesse initiale nulle, puisqu'il faut qu'elle soit compatible avec celle qui résulte des conditions imposées aux extrémités.

Je fais maintenant

$$(55)\qquad y = y_1 + \mathrm{Y},$$

et

$$(56)\qquad \left\{ \begin{aligned} y_1 = \Bigg[& \mathrm{A}_1 \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{k}}\, x\right) + \mathrm{B}_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{k}}\, x\right) \\ & + \mathrm{C}_1 \frac{e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}} x} - e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}} x}}{2} + \mathrm{D}_1 \frac{e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}} x} + e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}} x}}{2} \Bigg] \sin \omega t. \end{aligned} \right.$$

Je détermine les quatre coefficients A_1, B_1, C_1 et D_1 en substituant y_1 pour y dans les quatre conditions relatives aux extrémités, ce qui donne immédiatement

$$\mathrm{A}_1 = \frac{1}{2} r \frac{1 - \cos\sqrt{\frac{\omega}{k}}\, l}{\sin\sqrt{\frac{\omega}{k}}\, l},$$

$$\mathrm{B}_1 = \frac{1}{2} r,$$

$$\mathrm{C}_1 = r \frac{1 - \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}} l} + e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}} l}\right)}{e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}} l} - e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}} l}},$$

$$\mathrm{D}_1 = \frac{1}{2} r,$$

d'où l'on conclut, après quelques réductions,

$$(57)\qquad y_1 = \frac{1}{2} r \sin \omega t \left[\frac{\cos\sqrt{\frac{\omega}{k}}\left(x - \frac{l}{2}\right)}{\cos\sqrt{\frac{\omega}{k}}\frac{l}{2}} + \frac{e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}}\left(x - \frac{l}{2}\right)} + e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}}\left(x - \frac{l}{2}\right)}}{e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}}\frac{l}{2}} + e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}}\frac{l}{2}}} \right];$$

On a maintenant pour déterminer Y les équations

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = -k^2 \frac{d^4 Y}{dx^4},$$

$$(Y)_{x=0} = 0, \quad (Y)_{x=l} = 0,$$

$$\left(\frac{d^2 Y}{dx^2}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{d^2 Y}{dx^2}\right)_{x=l} = 0,$$

$$(Y)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{dY}{dt}\right)_{t=0} = \omega r - \left(\frac{dy_1}{dt}\right)_{t=0}.$$

Poisson a donné la solution, dans tous les cas possibles, de ce dernier genre de question, les conditions imposées aux extrémités ne variant pas avec le temps (*voir* sa *Mécanique* et son *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques,* t. VIII des *Mémoires de l'Académie des Sciences*).

On a ici

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} Y = \sum \Big[& \left(A_m \sin mx + A'_m \cos mx + B_m \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2} + B'_m \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2}\right) \sin m^2 kt \\ & + \left(C_m \sin mx + C'_m \cos mx + D_m \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2} + D'_m \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2}\right) \cos m^2 kt \Big]. \end{aligned} \right.$$

Les conditions imposées aux extrémités conduisent facilement à cette conséquence que tous les coefficients sont nuls, excepté A_m et C_m, et que

$$\sin ml = 0$$

ou

$$(59) \qquad m = \frac{i\pi}{l},$$

i étant un entier quelconque.

Mettant A_i et C_i au lieu de A_m et C_m, on a donc

$$Y = \sum \left[A_i \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 kt + C_i \sin \frac{i\pi x}{l} \cos \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 kt \right].$$

Les coefficients A_i et C_i se déterminent par les méthodes connues et d'après les valeurs initiales de Y et de $\frac{dY}{dt}$, d'où il résulte

$$C_i = 0$$

et

$$A_i = -2r\left(\frac{\omega l^2}{k}\right)^3 \frac{1-\cos i\pi}{(i\pi)^3\left[(i\pi)^4-\left(\frac{\omega l^2}{k}\right)^2\right]},$$

et l'on a en résumé

$$(60)\quad \left\{ \begin{aligned} y &= \frac{1}{2} r \sin\omega t \left[\frac{\cos\sqrt{\frac{\omega}{k}}\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\cos\sqrt{\frac{\omega}{k}}\frac{l}{2}} + \frac{e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}}\left(x-\frac{l}{2}\right)} + e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}}\left(x-\frac{l}{2}\right)}}{e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}}\frac{l}{2}} + e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}}\frac{l}{2}}} \right] \\ &\quad - 2r\left(\frac{\omega l^2}{k}\right) \sum \frac{(1-\cos i\pi)\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 kt}{(i\pi)^3\left[(i\pi)^4-\left(\frac{\omega l^2}{k}\right)^2\right]}, \end{aligned} \right.$$

ce qui est la solution générale de la question proposée.

Il est à remarquer que les intégrations effectuées ont fait disparaître les exponentielles de dessous le signe $\sum$, d'où il résulterait qu'à moins de certaines valeurs particulières de ω, l'ordonnée y ne tendrait pas à croître indéfiniment.

Il n'y aura lieu de tenir compte que des valeurs impaires de i, à cause du facteur $1-\cos i\pi$.

Les données de ce problème pourraient être variées de bien des manières qui toutes se traiteraient par le même procédé.