JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2\left(u^2 + v^2\right)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 257-272.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__257_0>

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande une expression simple du nombre des représentations d'un entier n quelconque par la forme à six variables

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2),$$

ou, ce qui revient au même, du nombre

$$\mathrm{N}[n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)]$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2),$$

dans laquelle x, y, z, t, u, v sont des entiers pairs ou impairs, indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Nous poserons

$$n = 2^\alpha m,$$

m désignant un entier impair, et l'exposant α pouvant se réduire à zéro. La valeur de

$$\mathrm{N}[2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)]$$

dépendra naturellement de l'exposant α. Quand α est > 0, elle dépend aussi de la valeur de m (mod. 4). Mais elle dépend surtout d'une certaine fonction numérique de m proportionnellement à laquelle

$$\mathrm{N}[2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)]$$

varie quand on considère la suite des entiers $2^\alpha m$ qui répondent à une même valeur donnée de α et de m (mod. 4). Deux mots d'abord sur cette fonction numérique

2. Décomposons l'entier m, de toutes les manières possibles, en un produit de deux facteurs conjugués d, δ, en sorte que

$$m = d\delta.$$

La fonction numérique dont nous parlons s'exprime par la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2.$$

En introduisant un symbole connu de Legendre, avec la signification plus étendue que lui attribue Jacobi, on peut encore l'écrire

$$\sum \left(\frac{-1}{\delta}\right) d^2.$$

On s'assure aisément que quand m est de la forme $4l+1$, cette fonction représente l'exçès de la somme des carrés des diviseurs de m qui sont $\equiv 1$ (mod. 4) sur la somme des carrés des diviseurs qui sont $\equiv 3$ (mod. 4). L'inverse a lieu quand m est de la forme $4l+3$. Pour $m = 1, 3, 5, 7, 9$, etc., les valeurs respectives de $\rho_2(m)$ sont $1, 8, 26, 48, 73$, etc.

Déjà, dans le temps, ayant eu occasion de considérer la fonction numérique plus générale

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^\mu,$$

je l'ai représentée par

$$\rho_\mu(m).$$

A l'indice $\mu = 2$ répond la fonction particulière

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2$$

dont nous avons besoin aujourd'hui. Représentons-la donc par

$$\rho_2(m).$$

Observons encore que la fonction $\rho_2(m)$ est décomposable en facteurs, et que si en exprimant m par un produit de puissances de nombres premiers on fait

$$m = \prod (a^r),$$

alors

$$\rho_2(m)$$

s'exprimera par le produit

$$\prod \left[a^{2r} + \left(\frac{-1}{a}\right) a^{2r-2} + a^{2r-4} + \left(\frac{-1}{a}\right) a^{2r-6} + \ldots\right].$$

Enfin rappelons une autre fonction

$$R_2(m),$$

exprimée par le produit plus simple

$$\prod \left[a^{2r} + \left(\frac{-1}{a}\right) a^{2r-2}\right],$$

et liée intimement à $\rho_2(m)$. Nous aurons en effet à employer la fonction $R_2(m)$ dans le cours même du présent article.

3. Revenant maintenant à la valeur demandée de

$$N\left[2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right],$$

considérons d'abord le cas d'un nombre impair, c'est-à-dire le cas de $\alpha = 0$, en sorte qu'il s'agisse seulement de

$$N[m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)].$$

L'octuple de $\rho_2(m)$ exprimera le nombre cherché.

En d'autres termes, on a

$$(1) \qquad N[m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 8\rho_2(m).$$

La formule (1) reste la même pour $m = 4l + 1$ et pour $m = 4l + 3$, c'est-à-dire pour

$$\left(\frac{-1}{m}\right) = 1$$

et pour

$$\left(\frac{-1}{m}\right) = -1.$$

La valeur de

$$\left(\frac{-1}{m}\right)$$

joue au contraire un rôle quand il s'agit d'un entier pair $2^\alpha m$. Car, dans l'hypothèse de $\alpha > 0$, je trouve que

$$(2)\quad \mathrm{N}\left(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right) = 4\left[2^{2\alpha+1} - \left(\frac{-1}{m}\right)\right]\rho_2(m).$$

Les formules (1) et (2) résolvent complétement la question proposée au n° 1. Je n'ai pas besoin de dire que le facteur

$$4\left[2^{2\alpha+1} - \left(\frac{-1}{m}\right)\right]$$

de $\rho_2(m)$ dans la formule (2) pourrait être remplacé par

$$4\left[2^{2\alpha+1} - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right],$$

ou encore par

$$4\left[2^{2\alpha+1} + (-1)^{\frac{m+1}{2}}\right].$$

4. Appliquons la formule (1),

$$\mathrm{N}\left[m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right] = 8\rho_2(m),$$

à quelques exemples.

Cette formule donne

$$\mathrm{N}\left[1 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right] = 8,$$

résultat qui s'accorde avec les identités

$$\begin{aligned}
1 &= (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),\\
1 &= 0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),\\
1 &= 0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),\\
1 &= 0^2 + 0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 + 2(0^2 + 0^2).
\end{aligned}$$

Elle donne ensuite

$$N[3 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 64;$$

or cela est confirmé par les identités

$$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2)$$

et

$$3 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 0^2),$$

qui fourniront pour l'entier 3 soixante-quatre représentations, si l'on a soin d'y affecter du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls, puis d'y opérer les permutations convenables.

On trouve encore

$$N[5 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 208.$$

La vérification de ce fait se tire des trois identités suivantes :

$$\begin{aligned}
5 &= 1^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),\\
5 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 2(1^2 + 0^2),\\
5 &= 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2).
\end{aligned}$$

La première de ces identités fournit quarante-huit représentations de l'entier 5, la seconde en donne cent vingt-huit, la troisième trente-deux ; or

$$48 + 128 + 32 = 208.$$

Les identités

$$\begin{aligned}
7 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2(0^2 + 0^2),\\
7 &= 1^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 0^2),\\
7 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2),
\end{aligned}$$

qui fournissent respectivement, pour l'entier 5, soixante-quatre, cent quatre-vingt-douze et cent vingt-huit représentations (en tout trois cent quatre-vingt-quatre), confirment l'exactitude de l'équation

$$N[7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 384.$$

Enfin, la formule (1) donne

$$N[9 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 584;$$

et ce résultat aussi est vérifié par les identités

$$\begin{aligned}
9 &= 3^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),\\
9 &= 1^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),\\
9 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2(1^2 + 0^2),\\
9 &= 1^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2),\\
9 &= 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(2^2 + 0^2).
\end{aligned}$$

Elles fournissent en effet respectivement, pour l'entier 9, huit, quatre-vingt-seize, deux cent cinquante-six, cent quatre-vingt-douze, et trente-deux représentations; or

$$8 + 96 + 256 + 192 + 32 = 584.$$

5. Vérifions à son tour la formule (2),

$$N[2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 4\left[2^{2\alpha+1} - \left(\frac{-1}{m}\right)\right]\rho_2(m),$$

où l'on doit prendre $\alpha > 0$.

Soit d'abord $\alpha = 1$, avec $m = 1$. Cette formule donne

$$N[2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 28,$$

ce qui est confirmé par les identités

$$2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2)$$

et

$$2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 0^2).$$

En y affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en y opérant les permutations convenables, on en tire respectivement vingt-quatre, puis quatre représentations de l'entier 2 ; or

$$24 + 4 = 28.$$

Soit ensuite $\alpha = 1$, mais $m = 3$. La formule (2) nous donnera

$$\mathrm{N}\left[6 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right] = 288.$$

On vérifiera ce fait au moyen des identités

$$\begin{aligned}
6 &= 1^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),\\
6 &= 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 0^2),\\
6 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2(1^2 + 0^2),\\
6 &= 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2).
\end{aligned}$$

La première et la dernière de ces identités fournissent chacune quatre-vingt-seize représentations, la seconde en fournit trente-deux et la troisième soixante-quatre : le total est bien deux cent quatre-vingt-huit.

Avec $\alpha = 1$, prenons enfin $m = 5$. La formule (2) nous donnera

$$\mathrm{N}\left(10 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right] = 728;$$

et la vérification se tirera cette fois des identités

$$\begin{aligned}
10 &= 1^2 + 3^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),\\
10 &= 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2(0^2 + 0^2),\\
10 &= 2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 0^2),\\
10 &= 1^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2),\\
10 &= 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2(2^2 + 0^2),\\
10 &= 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 2^2),
\end{aligned}$$

qui fournissent respectivement, pour l'entier 10, des nombres de représentations marqués par 48, 96, 96, 384, 96, 8 : la somme est bien 728.

Passant aux nombres pairement pairs, bornons-nous à prendre $m=1$, avec $\alpha=2$, puis $\alpha=3$. Nous aurons d'abord

$$N[4=x^2+y^2+z^2+t^2+2(u^2+v^2)]=124;$$

cela s'accorde avec les identités

$$4=2^2+0^2+0^2+0^2+2(0^2+0^2),$$
$$4=1^2+1^2+1^2+1^2+2(0^2+0^2),$$
$$4=1^2+1^2+0^2+0^2+2(1^2+0^2),$$
$$4=0^2+0^2+0^2+0^2+2(1^2+1^2).$$

Elles fournissent respectivement, pour l'entier 4, huit, seize, quatre-vingt-seize et enfin quatre représentations; or

$$8+16+96+4=124.$$

On a ensuite

$$N[8=x^2+y^2+z^2+t^2+2(u^2+v^2)]=508.$$

Or des identités

$$8=2^2+2^2+0^2+0^2+2(0^2+0^2),$$
$$8=1^2+1^2+2^2+0^2+2(1^2+0^2),$$
$$8=2^2+0^2+0^2+0^2+2(1^2+1^2),$$
$$8=1^2+1^2+1^2+1^2+2(1^2+1^2),$$
$$8=0^2+0^2+0^2+0^2+2(2^2+0^2),$$

on tire respectivement, pour l'entier 8, vingt-quatre, trois cent quatre-vingt-quatre, trente-deux, soixante-quatre et enfin quatre représentations, en tout cinq cent huit, comme l'indiquait notre formule, qui reste ainsi toujours vérifiée.

6. Jusqu'ici nous n'avons parlé que du nombre total

$$N[n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)]$$

des représentations propres ou impropres d'un entier donné n par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2).$$

Mais on peut désirer d'avoir séparément l'expression du nombre

$$M[n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)]$$

des représentations propres, pour lesquelles x, y, z, t, u, v n'admettent aucun facteur commun > 1. Cette seconde question est facile à résoudre, la première étant résolue.

Il faut continuer à poser

$$n = 2^\alpha m,$$

m étant un entier impair, mais considérer la fonction numérique

$$R_2(m)$$

au lieu de la fonction

$$\rho_2(m).$$

On devra de plus distinguer les quatre cas de $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha > 2$.

Quand $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impair, la formule est

$$(3) \qquad M[m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 8R_2(m).$$

Ainsi, ayant

$$R_2(9) = 9^2 - 3^2 = 72,$$

on en conclut que

$$M(9 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 576.$$

Or cette équation est exacte. On a vu plus haut, en effet, que le nombre 9 comporte en tout cinq cent quatre-vingt-quatre représentations par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2);$$

mais ici nous devons exclure les huit représentations impropres que l'on déduit de l'identité

$$9 = (\pm 3)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),$$

en y faisant occuper successivement à

$$(\pm 3)^2$$

les quatre premières places.

Quand $\alpha = 1$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impairement pair, je trouve

$$(4)\quad \mathrm{M}[2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 4\left[8 - \left(\frac{-1}{m}\right)\right]\mathrm{R}_2(m).$$

Ici la valeur de m (mod. 4) a de l'influence.

Elle en garde encore dans le cas de $\alpha = 2$; car on a

$$(5)\quad \mathrm{M}[4m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 4\left[30 - \left(\frac{-1}{m}\right)\right]\mathrm{R}_2(m),$$

de sorte que

$$\left(\frac{-1}{m}\right)$$

continue à figurer au second membre.

Mais pour $\alpha > 2$, quel que soit d'ailleurs α, on obtient la formule

$$(6)\quad \mathrm{M}[2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 15.2^{2\alpha-1}\mathrm{R}_2(m),$$

d'où

$$\left(\frac{-1}{m}\right)$$

a disparu.

En faisant $m = 1$ dans l'équation (5), on en conclut que

$$\mathrm{M}[4 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2) = 116.$$

Or cette équation est exacte. On a vu plus haut que l'entier 4 comporte en tout cent vingt-quatre représentations par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2).$$

Mais huit de ces représentations sont impropres; ce sont celles que fournit l'identité

$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),$$

en y faisant occuper successivement à

$$(\pm 2)^2$$

les quatre premières places. En les retranchant, il reste cent seize représentations propres.

Dans la formule (6), faisons $m = 1$, $\alpha = 3$; il nous viendra

$$M[8 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 480,$$

résultat exact. Le nombre 8 est représenté, il est vrai, cinq cent huit fois par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2);$$

mais il y a vingt-huit représentations impropres, savoir, celles que fournissent les deux identités

$$8 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2)$$

et

$$8 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2[(\pm 2)^2 + 0^2],$$

en y opérant les permutations convenables.

7. Maintenant exigeons que, dans l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2),$$

x, y, z, t, u, v soient des entiers impairs et positifs, du reste quelconques, et demandons-nous quel sera, sous ces conditions nouvelles, le nombre

$$\mathcal{N}[n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)]$$

des solutions. Il est bien clair que l'on aura

$$\mathcal{N}[n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 0$$

si n n'est pas un multiple de 8. Mais quelle est la valeur de

$$\mathcal{N}[2^{\varepsilon+3} m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)],$$

m étant un entier impair et ε étant égal ou supérieur à o?

La réponse à cette question est fournie par la formule ci-après:

$$(7) \qquad \mathcal{N}[2^{\varepsilon+3} m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 4^{\varepsilon} \rho_2(m),$$

$\rho_2(m)$ ayant la même signification qu'au n° **1**.

Soit, par exemple, $m = 1$ avec $\varepsilon = 0$. La formule (7) nous donnera

$$\mathcal{N}[8 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 1,$$

ce qui s'accorde avec l'équation

$$8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2(1^2 + 1^2),$$

la seule qu'on puisse écrire avec des valeurs de x, y, z, t, u, v impaires et positives.

En prenant $m = 1$, avec $\varepsilon = 1$, on trouve ensuite

$$\text{N}[16 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 4,$$

ce qui est confirmé par les identités

$$\begin{aligned}
16 &= 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2(1^2 + 1^2),\\
16 &= 1^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 2(1^2 + 1^2),\\
16 &= 1^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2 + 2(1^2 + 1^2),\\
16 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 2(1^2 + 1^2).
\end{aligned}$$

Maintenant, soit $\varepsilon = 0$, avec $m = 3$. On aura

$$\mathfrak{N}\,[24 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2\,(u^2 + v^2)] = 8,$$

résultat exact, comme le prouvent les identités

$$24 = 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 2(1^2 + 1^2)$$

et

$$24 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2(3^2 + 1^2),$$

où l'on devra effectuer les permutations convenables.

A l'hypothèse de

$$\varepsilon = 0, \quad m = 5$$

répond l'équation

$$\mathfrak{N}\,[40 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2\,(u^2 + v^2)] = 26,$$

que confirment les identités

$$\begin{aligned}
40 &= 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 2\,(1^2 + 1^2),\\
40 &= 5^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 2\,(1^2 + 1^2),\\
40 &= 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 2\,(3^2 + 1^2),\\
40 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2\,(3^2 + 3^2),
\end{aligned}$$

dont la seconde et la troisième comportent chacune douze permutations.

De même, à l'hypothèse de

$$\varepsilon = 0, \quad m = 7$$

répond l'égalité

$$\mathfrak{N}\,(56 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2\,(u^2 + v^2)] = 48,$$

qui se vérifie au moyen des équations identiques

$$\begin{aligned}
56 &= 5^2+5^2+1^2+1^2+2(1^2+1^2),\\
56 &= 5^2+3^2+3^2+3^2+2(1^2+1^2),\\
56 &= 7^2+1^2+1^2+1^2+2(1^2+1^2),\\
56 &= 3^2+3^2+3^2+3^2+2(1^2+3^2),\\
56 &= 5^2+3^2+1^2+1^2+2(1^2+3^2),\\
56 &= 3^2+3^2+1^2+1^2+2(3^2+3^2),\\
56 &= 1^2+1^2+1^2+1^2+2(5^2+1^2).
\end{aligned}$$

Les nombres de permutations que ces identités comportent sont respectivement

$$6,\ 4,\ 4,\ 2,\ 24,\ 6,\ 2;$$

or

$$6+4+4+2+24+6+2=48.$$

Soit encore $\varepsilon=0$, mais $m=9$. La formule (7) donne alors

$$\mathfrak{N}\left(72=x^2+y^2+z^2+t^2+2\left(u^2+v^2\right)\right]=73.$$

Or on a les identités

$$\begin{aligned}
72 &= 5^2+5^2+3^2+3^2+2(1^2+1^2),\\
72 &= 7^2+3^2+3^2+1^2+2(1^2+1^2),\\
72 &= 5^2+5^2+1^2+1^2+2(3^2+1^2),\\
72 &= 5^2+3^2+3^2+3^2+2(3^2+1^2),\\
72 &= 7^2+1^2+1^2+1^2+2(3^2+1^2),\\
72 &= 3^2+3^2+3^2+3^2+2(3^2+3^2),\\
72 &= 5^2+3^2+1^2+1^2+2(3^2+3^2),\\
72 &= 3^2+3^2+1^2+1^2+2(5^2+1^2),\\
72 &= 1^2+1^2+1^2+1^2+2(5^2+3^2).
\end{aligned}$$

Les nombres de permutations convenables, en allant de la première à la dernière, la sixième exceptée, sont

$$6,\ 12,\ 12,\ 8,\ 8,\ 12,\ 12,\ 2.$$

La somme

$$6+12+12+8+8+12+12+2$$

n'est égale qu'à soixante-douze. Mais on arrive à soixante-treize, en tenant compte de l'identité

$$7^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 2(3^2 + 3^2),$$

qui a été d'abord mise de côté.

8. Si à la condition imposée aux entiers x, y, z, t, u, v d'être impairs et positifs dans l'équation

$$2^{\varepsilon+3} m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2),$$

on ajoutait celle de n'avoir pour commun diviseur que l'unité, le nombre des solutions de cette équation ne resterait égal à

$$4^\varepsilon \rho_2(m)$$

que si m n'avait aucun diviseur carré > 1, je veux dire si m n'était divisible par aucun carré supérieur à l'unité, autrement dit si m n'était le produit que de facteurs premiers inégaux. Dans tout autre cas, ce nombre se réduirait à

$$4^\varepsilon \mathrm{R}_2(m),$$

le symbole

$$\mathrm{R}_2(m)$$

ayant la même signification qu'au n° **1**.

En d'autres termes, si

$$\mathfrak{M}\left[2^{\varepsilon+3} m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right]$$

désigne le nombre des solutions propres (impaires et positives) de l'équation

$$2^{\varepsilon+3} m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2),$$

on aura

$$(8) \qquad \mathfrak{M}\left[2^{\varepsilon+3}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right] = 4^{\varepsilon}\,\mathrm{R}_2(m).$$

Ainsi, par exemple, en prenant

$$\varepsilon = 0, \quad m = 9,$$

on a

$$\mathfrak{M}\left[72 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right] = 72.$$

Cela est exact. Tout à l'heure, en effet, nous avons trouvé soixante-treize solutions de l'équation

$$72 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2);$$

mais l'une d'elles est impropre, savoir celle que fournit l'identité

$$72 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 2(3^2 + 3^2).$$

Toutes les autres solutions sont des solutions propres, et il n'y en a plus que soixante-douze, comme l'indique notre formule.