JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; treizième article

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 249-256.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__249_0>

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

TREIZIÈME ARTICLE [*].

1. Je profite d'un instant de liberté pour reprendre la publication des notes que rempli d'une ardeur extraordinaire j'ai (en quelques semaines) entassées les unes sur les autres pendant l'automne de 1857, au sujet de certaines *formules générales* également utiles dans la théorie des nombres et dans celle des suites infinies. Le lecteur, dont je réclame de nouveau l'indulgence, voudra bien me permettre cette fois encore d'ajourner les démonstrations, qui sont au reste des plus simples.

Convenons d'abord de quelques notations dont nous ferons constamment usage dans le cours de cet article.

Soit

$$m$$

un nombre entier donné, de la forme

$$4\mu + 3.$$

Posons de toutes les manières possibles

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2m_3,$$

m_1, m_2, m_3 étant des entiers, savoir : m_1 impair, positif ou négatif; m_2

[*] Les six premiers articles ont été publiés en 1858, les cinq suivants en 1859, et le douzième en 1860.

pair ou impair, positif, nul ou négatif; enfin m_3 impair et positif. Il est bien clair que l'expression

$$m_1^2 + 4m_2^2 + 2m_3$$

ne peut représenter, sous les conditions indiquées, que des entiers $\equiv 3 \pmod{4}$. Aussi supposons-nous

$$m = 4\mu + 3.$$

Maintenant décomposons l'entier impair et positif m_3 en un produit de deux facteurs conjugués d_3, δ_3, en sorte que l'on ait

$$m_3 = d_3\,\delta_3,$$

d_3 et δ_3 étant aussi des entiers impairs et positifs. L'expression de m deviendra

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\,\delta_3.$$

L'entier m étant donné, il y aura plusieurs systèmes de valeurs de

$$m_1,\ m_2,\ m_3,$$

et à fortiori plusieurs systèmes de valeurs de

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ \delta_3.$$

Nous considérons à la fois tous ces systèmes, et c'est à leur ensemble que va se rapporter le signe de sommation

$$\sum$$

qui figurera dans nos formules.

2. Ces préliminaires compris, désignons par

$$F(x, y, z)$$

une fonction impaire (analytique ou numérique) des trois indéterminées x, y, z dont les valeurs seront toujours entières, de signes quelconques, mais x impair, y et z pairs, la valeur zéro admise. En disant que la fonction

$$F(x, y, z)$$

est impaire, relativement à z par exemple, nous entendons que, pour toutes les valeurs de x, y, z dont nous ferons usage, on aura

$$F(x, y, -z) = -F(x, y, z);$$

et comme il peut arriver que $z = 0$, nous ajoutons la condition spéciale

$$F(x, y, 0) = 0.$$

Par rapport à y, on devra avoir de même

$$F(x, -y, z) = -F(x, y, z), \quad F(x, 0, z) = 0.$$

Mais relativement à x, entier impair et dès lors toujours différent de zéro, il suffit que

$$F(-x, y, z) = -F(x, y, z);$$

il n'y a pas à se préoccuper de la valeur de

$$F(0, y, z),$$

qui ne se présentera jamais. On n'a à tenir compte que des systèmes de valeurs de x, y, z dont on fait usage. La fonction $F(x, y, z)$ est suffisamment définie pour notre objet quand on donne pour ces divers systèmes (en nombre limité) les valeurs correspondantes de la fonction, lesquelles sont du reste à volonté, sous les conditions que l'on vient d'énumérer.

3. Les valeurs que nous attribuons à

$$x, y, z$$

sont tirées du mode de partition de l'entier donné m que fournit notre équation

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\delta_3.$$

Les voici :

$$x = \delta_3 - 2m_2,$$
$$y = d_3 + 2m_2 - m_1,$$
$$z = d_3 + 2m_2 + m_1.$$

A chaque système

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ \delta_3$$

répond une valeur de

$$F(x, y, z),$$

savoir

$$F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1).$$

Cette valeur est tantôt positive, tantôt négative. Or notre théorème consiste en ce que les valeurs négatives et les valeurs positives se compensent exactement, de façon que la somme algébrique pour l'ensemble des systèmes

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ \delta_3,$$

qui se rapportent à l'entier donné m, est égale à zéro. C'est ce que nous exprimons en écrivant l'équation

$$\text{(A)}\qquad \sum F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1) = 0,$$

qui nous paraît constituer une formule nouvelle et très-remarquable.

La somme indiquée au premier membre de l'équation (A) est au fond une somme multiple. Nous ne mettons cependant qu'un seul signe

$$\sum,$$

espérant que cette simplification (que nous nous sommes déjà permise dans une lettre adressée à M. Hermite, cahier de février 1862) ne gênera en rien nos lecteurs, accoutumés maintenant à ce genre de formules.

4. Nous nous bornerons aux deux exemples de $m = 3$ et de $m = 7$. Pour $m = 3$, l'équation générale

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\delta_3$$

fournit deux équations particulières

$$3 = 1^2 + 4.0^2 + 2.1.1,$$
$$3 = (-1)^2 + 4.0^2 + 2.1.1.$$

Il n'y a donc que deux valeurs de

$$F(x, y, z),$$

qui sont

$$F(1, 0, 2), \quad F(1, 2, 0).$$

Elles sont toutes deux nulles, puisqu'une des indéterminées se trouve égale à zéro sous le signe F. Leur somme aussi est donc nulle.

Pour $m = 7$, il y a huit équations de la forme

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\delta_3,$$

savoir :

$$7 = 1^2 + 4.0^2 + 2.1.3,$$
$$7 = 1^2 + 4.0^2 + 2.3.1,$$
$$7 = (-1)^2 + 4.0^2 + 2.1.3,$$
$$7 = (-1)^2 + 4.0^2 + 2.3.1,$$
$$7 = 1^2 + 4.1^2 + 2.1.1,$$
$$7 = 1^2 + 4(-1)^2 + 2.1.1,$$
$$7 = (-1)^2 + 4.1^2 + 2.1.1,$$
$$7 = (-1)^2 + 4(-1)^2 + 2.1.1.$$

La somme des valeurs correspondantes de

$$F(x, y, z)$$

est donc composée de huit termes :

$$F(3, 0, 2) + F(1, 2, 4) + F(3, 2, 0) + F(1, 4, 2) + F(-1, 2, 4) + F(3, -2, 0) + F(-1, 4, 2) + F(3, 0, -2).$$

Or quatre de ces termes sont nuls puisque une des indéterminées y est nulle sous le signe F; et les quatre autres se détruisent deux à deux, puisque, par la nature de la fonction F, on a

$$F(-1, 2, 4) = -F(1, 2, 4)$$

et

$$F(-1, 4, 2) = -F(1, 4, 2).$$

La formule (A) est donc vérifiée.

5. On tirera de la formule (A) une formule particulière, mais encore d'une grande étendue, en remplaçant la fonction

$$F(x, y, z)$$

par celle-ci

$$(-1)^{\frac{x-1}{2}} F(y, z),$$

qui remplira les conditions voulues si la fonction nouvelle

$$F(y, z)$$

est telle que l'on ait

$$F(-y, z) = -F(y, z), \quad F(y, -z) = -F(y, z)$$

avec

$$F(0, z) = 0, \quad F(y, 0) = 0.$$

Relativement à x, en effet,

$$(-1)^{\frac{x-1}{2}}$$

est une fonction impaire, changeant seulement de signe quand x change de signe en conservant sa valeur numérique qui, ne l'oublions pas, est toujours exprimée par un entier impair.

Je pose, d'après cela, l'équation

$$(\mathrm{A}_1) \quad \sum (-1)^{\frac{\delta_3 - 1}{2} + m_2} F(d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1) = 0;$$

mais je ne m'arrête pas à la vérifier.

6. Notons encore une équation qu'on déduira de l'équation (A), en

y prenant

$$F(x, y, z) = \mathfrak{F}\left(x, \frac{z+y}{2}\right) - \mathfrak{F}\left(x, \frac{z-y}{2}\right),$$

la fonction

$$\mathfrak{F}(x, u)$$

continuant à être impaire par rapport à x, c'est-à-dire restant assujettie à la condition que

$$\mathfrak{F}(-x, u) = -\mathfrak{F}(x, u),$$

mais étant au contraire paire par rapport à u, en sorte que

$$\mathfrak{F}(x, -u) = \mathfrak{F}(x, u).$$

De cette manière, en effet, les conditions exigées pour l'exactitude de la formule (A) seront remplies, comme on le verra facilement.

Je pose donc à son tour l'équation

$$(\mathrm{A}_2) \qquad \sum \left[\mathfrak{F}(\delta_3 - 2m_2, d_3 + 2m_2) - \mathfrak{F}(\delta_3 - 2m_2, m_1)\right] = 0.$$

Elle nous apprend que les deux sommes

$$\sum \mathfrak{F}(\delta_3 - 2m_2, d_3 + 2m_2)$$

et

$$\sum \mathfrak{F}(\delta_3 - 2m_2, m_1)$$

sont égales entre elles; cela aura certainement lieu, je le répète, pourvu que l'on ait

$$\mathfrak{F}(-x, u) = -\mathfrak{F}(x, u), \quad \mathfrak{F}(x, -u) = \mathfrak{F}(x, u),$$

quelle que soit d'ailleurs la fonction

$$\mathfrak{F}(x, u).$$

7. De l'équation (A_2), on pourrait descendre à l'équation plus particulière encore

$$(A_3) \qquad \sum (-1)^{\frac{\delta_3-1}{2}+m_1}[f(d_3+2m_2)-f(m_1)]=0,$$

où la fonction

$$f(u)$$

doit être paire, c'est-à-dire telle que l'on ait

$$f(-u)=f(u).$$

Par exemple, on pourra prendre

$$f(u)=\cos(ut),$$

t étant une constante quelconque, ce qui donnera

$$\sum (-1)^{\frac{\delta_3-1}{2}+m_1}[\cos(d_3+2m_2)t-\cos m_1 t]=0,$$

équation qu'on peut réduire à la forme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta_3-1}{2}+m_1}\cos d_3 t\cos 2m_2 t=\sum (-1)^{\frac{\delta_3-1}{2}+m_1}\cos m_1 t,$$

en supprimant la somme nulle

$$\sum (-1)^{\frac{\delta_3-1}{2}+m_1}\sin d_3 t\sin 2m_2 t,$$

et qui se trouve répondre à une combinaison de deux des équations établies par Jacobi dans ses *Fundamenta nova*.

Mais je n'insiste pas sur ces détails. Mon but, dans cet article, était surtout de poser la formule générale (A), en expliquant nettement sous quelles conditions elle est exacte. Les applications viendront plus tard.