JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 1-12.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n quelconque, on demande le nombre

$$N(n)$$

des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2,$$

c'est-à-dire le nombre

$$N(n)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs. Nous écrivons, comme on voit, pour abréger,

$$N(n)$$

au lieu de

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2).$$

La forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2$$

étant la seule dont nous voulions parler ici, cette simplification n'amènera aucune équivoque.

Comme les nombres premiers 2 et 5, quand ils divisent n, jouent un rôle tout spécial dans la formule qui détermine $N(n)$, nous poserons

$$n = 2^\alpha 5^\beta m,$$

m étant un entier impair non divisible par 5, et les exposants α, β pouvant se réduire à zéro.

Eisenstein s'est occupé en 1847 (*Journal de Crelle*, t. XXXV, p. 134) du cas particulier de $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $n = m$, c'est-à-dire du cas particulier où l'on ne considère qu'un entier impair, non divisible par 5. La règle qu'il donne sans démonstration pour trouver $N(m)$ consiste à chercher l'excès de la somme des diviseurs de m qui sont résidus quadratiques de 5 sur celle des diviseurs de m qui sont au contraire non résidus. On en conclut la valeur de $N(m)$, en multipliant cet excès (qui est tantôt positif, tantôt négatif) par 6 ou par -4, suivant que m est ou n'est pas résidu quadratique de 5.

Désignons par d un quelconque des diviseurs de m (1 et m compris). On a, conformément à une notation de Legendre aujourd'hui adoptée partout,

$$\left(\frac{d}{5}\right) = 1$$

quand d est résidu quadratique de 5, tandis que

$$\left(\frac{d}{5}\right) = -1$$

quand d est non résidu. D'ailleurs les entiers impairs, premiers à 5 et résidus quadratiques de 5, sont tous de la forme

$$10k \pm 1,$$

tandis que les entiers impairs, premiers à 5 et non résidus quadratiques de 5, sont fournis par la formule

$$10k \pm 3.$$

La règle d'Eisenstein revient donc aux équations ci-après :

$$\mathrm{N}(m) = 6 \sum \left(\frac{d}{5}\right) d$$

quand $m = 10k \pm 1$; mais

$$\mathrm{N}(m) = -4 \sum \left(\frac{d}{5}\right) d$$

quand $m = 10k \pm 3$. Le signe sommatoire porte naturellement sur les diviseurs d.

On peut substituer à la fonction

$$\sum \left(\frac{d}{5}\right) d$$

une autre fonction numérique de même valeur absolue, mais qui a l'avantage d'exprimer toujours un nombre positif. Soit δ le quotient de m par d, en sorte que $m = d\delta$. La fonction numérique dont je veux parler sera

$$\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

On a, en effet,

$$\left(\frac{\delta}{5}\right) = \left(\frac{d}{5}\right)$$

quand $m = 10k \pm 1$, et

$$\left(\frac{\delta}{5}\right) = -\left(\frac{d}{5}\right)$$

quand $m = 10k \pm 3$.

Ainsi

$$\mathrm{N}(m) = 6 \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d,$$

pour $m = 10k \pm 1$; et

$$\mathrm{N}(m) = 4 \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d,$$

pour $m = 10k \pm 3$. Ou bien encore on a généralement

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{N}(m) = \left[5 + \left(\frac{m}{5}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

L'équation (1) résume tout ce que l'on doit à Eisenstein, relativement au sujet qui nous occupe.

La somme représentée par

$$\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d$$

s'exprime aussi par un produit. Soient a, b,..., les facteurs premiers dont m est composé, en sorte que l'on ait

$$m = a^{\mu} b^{\nu} \ldots;$$

le produit dont je parle pourra s'écrire

$$\prod \left[a^{\mu} + \left(\frac{a}{5}\right) a^{\mu-1} + a^{\mu-2} + \left(\frac{a}{5}\right) a^{\mu-3} + \ldots\right].$$

Je ne pense pas que la notation dont je me sers ici, et que j'ai déjà employée ailleurs, ait besoin d'être expliquée, ni qu'il soit nécessaire d'ajouter que pour $m = 1$ la valeur du produit dont il s'agit est supposée aussi égale à 1.

On voit par cette expression en produit que la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d$$

est essentiellement > 0, quel que soit l'entier m.

Il est bon enfin de faire observer que l'on pourrait remplacer la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d$$

par celle-ci

$$\sum \left(\frac{5}{\delta}\right) d,$$

où l'on donne au signe de Legendre la signification nouvelle et plus étendue que lui attribue Jacobi. Par là on mettrait mieux en évidence certaines analogies que nous développerons une autre fois; mais pour le moment nous conserverons la formule (1) telle que nous l'avons écrite.

En y prenant successivement

$$m = 1,\quad m = 3,\quad m = 7,\quad m = 9,\quad \text{etc.},$$

cette formule donne

$$N(1) = 6,\quad N(3) = 8,\quad N(7) = 24,\quad N(9) = 42,\quad \text{etc.},$$

résultats dont l'exactitude est aisée à vérifier. Mais je ne veux pas insister sur ces calculs numériques.

2. En m'occupant à mon tour de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2,$$

j'ai naturellement cherché d'abord à constater au moyen de mes *formules générales* l'exactitude de l'équation (1); puis, cela fait, j'ai considéré les entiers qu'Eisenstein a laissés de côté et qui offraient des difficultés spéciales à cause du facteur premier 2, ou du facteur premier 5, ou de ces deux facteurs premiers réunis.

J'ai réussi par deux méthodes différentes à me débarrasser des difficultés provenant du facteur 5. En effet, tout entier n divisible par 5 peut être mis sous la forme

$$5^\beta q,$$

q étant premier à 5. Or je trouve que l'on a

$$N(5^\beta q) = \frac{1}{6}(5^{\beta+1} + 1)\,N(q)$$

quand

$$q \equiv \pm 1 \pmod{5};$$

et

$$N(5^\beta q) = \frac{1}{4}(5^{\beta+1} - 1)\,N(q)$$

quand

$$q \equiv \pm 3 \pmod{5}.$$

On peut comprendre ces deux équations en une seule, en écrivant que

$$N(5^\beta q) = \frac{5^{\beta+1} + \left(\frac{q}{5}\right)}{5 + \left(\frac{q}{5}\right)} N(q). \tag{2}$$

L'équation (2) subsisterait, mais deviendrait purement identique, si l'on y faisait $\beta = 0$.

Lorsque q se réduit à un entier impair m, la valeur de $N(q)$ ou de $N(m)$ est fournie par l'équation (1). La combinaison des équations (1) et (2) conduit donc à cette formule remarquable

$$N(5^\beta m) = \left[5^{\beta+1} + \left(\frac{m}{5}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d, \tag{3}$$

laquelle reste exacte même pour $\beta = 0$, puisqu'alors elle coïncide avec l'équation (1).

En y prenant $m = 1$, $\beta = 1$, on en conclut

$$N(5) = 26;$$

or cela est vérifié par les équations

$$5 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 5(\pm 1)^2$$

et

$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 5.0^2,$$

qui donnent pour l'entier 5 vingt-six représentations en opérant dans la seconde d'entre elles les permutations convenables.

Pour $m = 3$, $\beta = 1$, il viendrait

$$N(15) = 48.$$

Or il y a en effet quarante-huit représentations de l'entier 15 par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2;$$

elles résultent naturellement de l'identité

$$15 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 5(\pm 1)^2.$$

Mais quand q est pair, en sorte que

$$q = 2^{\alpha} m,$$

m étant impair (et premier à 5, comme q), la valeur de $N(q)$, ou plutôt de $N(2^{\alpha} m)$ reste à trouver. Voici comment nous l'obtiendrons.

3. Soit d'abord $\alpha = 1$, en sorte qu'il s'agisse d'un entier impairement pair.

Je trouve que

$$N(2m) = 12 \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d$$

quand

$$m = 10k \pm 1,$$

tandis que

$$N(2m) = 18 \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d$$

quand

$$m = 10k \pm 3.$$

Ces deux équations sont, du reste, comprises dans l'équation unique

$$(4) \qquad N(2m) = 3\left[5 - \left(\frac{m}{5}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

Pour aller plus loin dans la série des puissances de 2, on distinguera le cas de α impair ($\alpha = 2\gamma + 1$) du cas de α pair ($\alpha = 2\gamma + 2$). On a, je m'en suis assuré,

$$(5) \qquad N(2^{2\gamma+1} m) = \frac{2^{2\gamma+2} + 5}{9} N(2m)$$

et

$$(6) \qquad N(2^{2\gamma+2} m) = \frac{2^{2\gamma+3} - 5}{3} N(m).$$

On peut faire $\gamma = 0$ dans ces deux équations. Alors l'équation (5) devient identique, et l'équation (6) donne

$$N(4m) = N(m),$$

résultat qu'on pouvait facilement prévoir *à priori*.

En portant dans l'équation (5) la valeur de $N(2m)$ fournie par l'équation (4), et dans l'équation (6) la valeur de $N(m)$ fournie par l'équation (1), on obtient respectivement

$$N(2^{2\gamma+1}m) = \frac{1}{3}\left[5 - \left(\frac{m}{5}\right)\right](2^{2\gamma+2} + 5)\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d$$

et

$$N(2^{2\gamma+2}m) = \frac{1}{3}\left[5 + \left(\frac{m}{5}\right)\right](2^{2\gamma+3} - 5)\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d,$$

formules que je réunis en une seule en écrivant, sous la condition de $\alpha > 0$,

$$(7)\quad N(2^{\alpha}m) = \frac{1}{3}\left[5 + (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\right]\left[2^{\alpha+1} - (-1)^{\alpha}.5\right]\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d.$$

Maintenant combinez la formule (7) avec la formule (2) où vous ferez $q = 2^{\alpha}m$, observez d'ailleurs que

$$\left(\frac{2^{\alpha}m}{5}\right) = (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right),$$

et vous obtiendrez, pour tous les nombres pairs, la formule que voici :

$$(8)\quad N(2^{\alpha}5^{\beta}m) = \frac{1}{3}\left[5^{\beta+1} + (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\right]\left[2^{\alpha+1} - (-1)^{\alpha}.5\right]\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d.$$

On peut, dans la formule (8), faire $\beta = 0$, mais non pas $\alpha = 0$. Le cas de $\alpha = 0$ est résolu par la formule (3) dans laquelle la valeur $\beta = 0$ est admissible comme toute autre valeur. Les formules (3) et (8) résolvent complétement la question que nous nous étions proposée.

4. Nous venons de déterminer le nombre total

$$N(n)$$

des solutions propres ou impropres de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2.$$

Ajoutons quelques mots relativement au nombre

$$M(n)$$

des solutions *propres*, pour lesquelles les indéterminées x, y, z, t ne doivent avoir aucun facteur commun > 1.

Posons comme ci-dessus

$$n = 2^\alpha 5^\beta m,$$

m étant impair et premier à 5; mais au lieu de la fonction numérique de m exprimée par la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d$$

ou par le produit

$$\prod \left[a^\mu + \left(\frac{a}{5}\right) a^{\mu-1} + a^{\mu-2} + \left(\frac{a}{5}\right) a^{\mu-3} + \ldots\right]$$

relatif aux facteurs premiers de m, introduisons celle-ci :

$$\prod \left[a^\mu + \left(\frac{a}{5}\right) a^{\mu-1}\right].$$

En faisant

$$N(2^\alpha 5^\beta m) = G(\alpha, \beta, m) \prod \left[a^\mu + \left(\frac{a}{5}\right) a^{\mu-1}\right],$$

on trouvera sans peine, suivant les cas divers qui peuvent se présenter, la valeur de

$$G(\alpha, \beta, m).$$

Soit d'abord $\alpha = 0$, puis distinguons les cas de $\beta = 0$, $\beta = 1$, $\beta > 1$. On a

$$G(0, 0, m) = 5 + \left(\frac{m}{5}\right), \quad G(0, 1, m) = 25 + \left(\frac{m}{5}\right);$$

et, pour $\beta > 1$,

$$G(0, \beta, m) = 24.5^{\beta-1}.$$

Soit ensuite $\alpha = 1$, puis successivement $\beta = 0$, $\beta = 1$, $\beta > 1$.

On a

$$G(1, 0, m) = 3\left[5 - \left(\frac{m}{5}\right)\right], \quad G(1, 1, m) = 3\left[25 - \left(\frac{m}{5}\right)\right];$$

enfin, pour $\beta > 1$,

$$G(1, \beta, m) = 72.5^{\beta-1}.$$

Quand $\alpha = 2$, il n'y a pas de solutions propres. Ainsi

$$M(4.5^\beta m) = 0,$$

quel que soit l'exposant β. En effet, l'équation

$$4.5^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2$$

ne peut avoir lieu qu'en prenant pour x, y, z, t des entiers pairs, par conséquent des entiers affectés du facteur commun 2.

En dernier lieu, soit $\alpha > 2$, et successivement $\beta = 0$, $\beta = 1$, $\beta > 1$. On aura

$$G(\alpha, 0, m) = 2^{\alpha-1}\left[\,5 + (-1)^\alpha\left(\frac{m}{5}\right)\right]$$

et

$$G(\alpha, 1, m) = 2^{\alpha-1}\left[25 + (-1)^\alpha\left(\frac{m}{5}\right)\right];$$

mais, pour $\beta > 1$,

$$G(\alpha, \beta, m) = 3.2^{\alpha+2}.5^{\beta-1}.$$

La question proposée est donc résolue. Le cas de $\alpha = 0$, $\beta = 0$ a été traité par Eisenstein à l'endroit déjà cité du *Journal de Crelle*. Notre solution s'accorde alors avec la sienne. Les autres cas sont discutés ici pour la première fois.

5. Exigeons à présent que dans les représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2,$$

on n'admette plus pour x, y, z, t que des valeurs impaires et positives. Quel sera, dans ces conditions nouvelles, le nombre total

$$\mathfrak{M}(n)$$

des représentations propres ou impropres? Il est évident qu'on aura

$$\mathfrak{M}(n) = 0$$

si n n'est pas multiple de 8. Mais quelle sera la valeur de

$$\mathfrak{M}(8.2^{\varepsilon}5^{\beta}m),$$

m étant un entier impair, premier à 5, et les exposants ε, β ayant des valeurs quelconques, la valeur o comprise?

Je réponds à cette question par l'équation suivante, bien facile à établir,

$$\mathfrak{M}(8.2^{\varepsilon}5^{\beta}m) = \frac{1}{16}\left[\mathrm{N}(2^{\varepsilon+3}5^{\beta}m) - \mathrm{N}(2^{\varepsilon+1}5^{\beta}m)\right],$$

de laquelle on déduit, d'après ce qui a été dit ci-dessus,

$$\mathfrak{M}(8.2^{\varepsilon}5^{\beta}m) = 2^{\varepsilon-2}\left[5^{\beta+1} - (-1)^{\varepsilon}\left(\frac{m}{5}\right)\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d.$$

Si, tout en continuant à exiger pour x, y, z, t des valeurs impaires et positives, on ne demandait que le nombre

$$\mathfrak{M}(8.2^{\varepsilon}5^{\beta}m)$$

des représentations propres, il faudrait distinguer les trois cas de $\beta = 0$, $\beta = 1$, $\beta > 1$. La fonction

$$\prod\left[a^{\mu} + \left(\frac{a}{5}\right)a^{\mu-1}\right]$$

reparaîtrait. On a, en effet,

$$\mathfrak{M}(8.2^{\varepsilon}m) = 2^{\varepsilon-2}\left[5 - (-1)^{\varepsilon}\left(\frac{m}{5}\right)\right]\prod\left[\left(a^{\mu} + \left(\frac{a}{5}\right)a^{\mu-1}\right],$$

puis

$$\mathfrak{M}(8.2^\varepsilon 5m) = 2^{\varepsilon-2}\left[25 - (-1)^\varepsilon \left(\frac{m}{5}\right)\right] \prod \left[\left(a^\mu + \left(\frac{a}{5}\right) a^{\mu-1}\right]\right];$$

enfin, pour $\beta > 1$,

$$\mathfrak{M}(8.2^\varepsilon 5^\beta m) = 3.2^{\varepsilon+1} 5^{\beta-1} \prod \left[a^\mu + \left(\frac{a}{5}\right) a^{\mu-1}\right].$$

Je crois pouvoir me dispenser d'ajouter des exemples.