JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. CAQUÉ

Méthode nouvelle pour l'intégration des équations différentielles linéaires ne contenant qu'une variable indépendante

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 185-222.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__185_0>

MÉTHODE NOUVELLE

Pour l'intégration des équations différentielles linéaires ne contenant qu'une variable indépendante;

PAR M. J. CAQUÉ.

La méthode des limites est applicable à l'étude des équations différentielles. De même que, pour découvrir les propriétés d'une courbe, on cherche les propriétés communes à des polygones qui tendent à se confondre avec elle; de même, pour découvrir les propriétés d'une équation différentielle, on peut choisir une équation aux différences finies se confondant avec la proposée lorsqu'on annule les différences des variables indépendantes, puis chercher les propriétés de cette équation qui sont indépendantes des grandeurs de ces différences.

Ces considérations m'ont conduit à une méthode nouvelle pour l'intégration des équations différentielles qui, ne contenant qu'une variable indépendante et une seule fonction de cette variable, sont linéaires par rapport à la fonction et à ses dérivées.

L'exposition de cette méthode est l'objet de ce Mémoire.

1. Toute équation différentielle ne contenant qu'une variable indépendante, et qui est linéaire par rapport à la fonction et à ses dérivées, peut être mise sous la forme suivante

$$(\mathrm{X})\quad \frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = \mathrm{A}(x) + \mathrm{A}_0(x)\,y + \mathrm{A}_1(x)\frac{dy}{dx} + \mathrm{A}_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + \mathrm{A}_p(x)\frac{d^py}{dx^p},$$

où $\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{A}_0(x)$, $\mathrm{A}_1(x)$,..., $\mathrm{A}_p(x)$, désignent des fonctions données de la variable indépendante.

Je me propose de trouver l'intégrale générale de l'équation (X).

L'équation aux différences finies

$$(\mathrm{X}') \quad \frac{\Delta^{p+1} y}{\Delta x^{p+1}} = \mathrm{A}(x) + \mathrm{A}_0(x) y + \mathrm{A}_1(x) \frac{\Delta y}{\Delta x} + \mathrm{A}_2(x) \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \ldots + \mathrm{A}_p(x) \frac{\Delta^p y}{\Delta x^p},$$

où Δx est une constante quelconque, se confond évidemment avec la précédente lorsque $\Delta x = 0$; toute équation équivalente à (X′) deviendra donc, à cette limite, une équation équivalente à (X); en conséquence, si je trouve une équation équivalente à (X′), fournissant, à la limite, l'expression de l'une des dérivées de y en fonction de x, le calcul de l'intégrale générale de l'équation (X) se réduira à un nombre limité de quadratures.

Ainsi l'intégration de l'équation (X) est mon but, et la transformation de l'équation (X′) mon moyen.

2. Avant d'entrer en matière, je vais faire connaître, pour n'y plus revenir, les hypothèses dont je ne m'écarterai jamais.

Pour donner à mes résultats toute la généralité qu'ils comportent, je supposerai que la variable reçoit des valeurs de la forme $u + v\sqrt{-1}$, où u et v désignent des quantités réelles; mais ces valeurs formeront toujours une progression par différence, car l'équation (X′) n'a pour limite l'équation (X) que dans le cas où Δx est une constante. Ainsi, en considérant u et v comme les coordonnées rectangulaires d'un point du plan, toutes les valeurs que j'attribuerai à la variable seront représentées par des points en ligne droite et équidistants. Ces points peuvent être d'ailleurs aussi rapprochés qu'on voudra, puisque la constante Δx est arbitraire.

Je supposerai qu'en chaque point du segment de droite joignant les valeurs extrêmes de la variable, les coefficients des équations (X) et (X′) ont des valeurs finies. Par exemple, on voit que les valeurs réelles de x, pour lesquelles quelques-unes des fonctions $\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{A}_0(x)$, $\mathrm{A}_1(x), \ldots$, cessent d'être finies, sont représentées par des points de l'axe des abscisses qui le divisent en segments; dans le cas particulier où l'on ne donnerait à la variable que des valeurs réelles, je supposerais que les valeurs extrêmes de x appartiennent à un même segment, quelconque d'ailleurs.

Les coefficients des équations (X) et (X′) peuvent souffrir des solutions de continuité.

Tous mes calculs sont faits en vue de l'équation (X); je rencontrerai souvent des quantités qu'il est inutile de développer, parce qu'elles doivent disparaître à la limite, et dont cependant je crois bon de conserver la trace; je les désigne toutes, sans distinction, par la lettre ε. Ainsi ε désignera toujours une quantité infiniment petite, c'est-à-dire une quantité qui s'annule avec l'accroissement de la variable indépendante.

Mon Mémoire est divisé en quatre chapitres :

Dans le premier je fais connaître une expression du rapport $\frac{\Delta^q y}{\Delta x^q}$;

Dans le second je transforme l'équation (X′);

Dans le troisième j'intègre l'équation (X);

Dans le quatrième j'applique ma méthode aux équations linéaires du premier ordre et aux équations linéaires à coefficients constants.

Les équations dont je me sers sont désignées : les unes par des numéros d'ordre, les autres par des lettres; ces dernières sont celles sur lesquelles je veux attirer plus particulièrement l'attention du lecteur.

CHAPITRE PREMIER.

D'une forme qu'on peut donner au rapport $\frac{\Delta^q y_m}{\Delta z^q}$ lorsque Δz est une constante et y une fonction quelconque de z.

3. Soit

$$x_0,\ z_1,\ z_2,\ldots,\ z_{n-1},\ x$$

une suite de valeurs quelconques d'une variable, et soit aussi

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_{n-1},\ y$$

la suite des valeurs correspondantes d'une fonction quelconque de cette variable. En représentant par $\Delta^q y_k$ la différence $q^{ième}$ de y_k, et en posant, pour abréger,

$$S_p = y_0 + \frac{m}{1}\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\Delta^p y_0,$$

et

$$R_p = \frac{(m-1)\ldots(m-p)}{1.2\ldots p}\Delta^{p+1}y_0 + \frac{(m-2)\ldots(m-p-1)}{1.2\ldots p}\Delta^{p+1}y_1 + \ldots$$
$$+ \frac{p(p-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots p}\Delta^{p+1}y_{m-p-1},$$

on a, quels que soient m et p,

$$(1) \qquad y_m = S_p + R_p.$$

On trouvera la démonstration de cette expression dans une Note sur la formule de Taylor, que M. Liouville m'a fait l'honneur d'insérer dans le tome X de son journal.

Je suppose maintenant que les valeurs de la variable forment une progression par différence dont la raison est Δz, et, en me fondant sur cette hypothèse, je vais mettre la valeur de y_m sous une autre forme.

Je désigne par

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_p,$$

les valeurs que prennent la fonction et ses p premières dérivées, quand on y remplace la variable par sa valeur initiale x_0; et je pose

$$(\mathrm{A}) \qquad \theta(z) = a_0 + a_1\frac{z-x_0}{1} + a_2\frac{(z-x_0)^2}{1.2} + \ldots + a_p\frac{(z-x_0)^p}{1.2\ldots p}.$$

Comme on a, quel que soit l'entier r,

$$r = \frac{z_r - x_0}{\Delta z},$$

on peut substituer à S_p l'expression équivalente

$$y_0 + \frac{z_m - x_0}{1}\frac{\Delta y_0}{\Delta z} + \frac{(z_m-x_0)(z_m-x_0-\Delta z)}{1.2}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta z^2} + \ldots$$
$$+ \frac{(z_m-x_0)(z_m-x_0-\Delta z)\ldots[(z_m-x_0)-(p-1)\Delta z]}{1.2\ldots p}\frac{\Delta^p y_0}{\Delta z^p},$$

et cette dernière peut être remplacée par

$$\theta(z_m) + \varepsilon;$$

car, lorsque Δz tend vers o, les rapports $\frac{\Delta y_0}{\Delta z}, \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta z^2}, \ldots, \frac{\Delta^p y_0}{\Delta z^p}$, tendent vers leurs limites respectives, $a_1, a_2, \ldots, a_p$, et le produit

$$(z_m - x_0)(z_m - x_0 - \Delta z)\ldots[(z_m - x_0) - (k-1)\Delta z]$$

tend vers $(z_m - x_0)^k$ pour toutes les valeurs finies de k.

Quant à la valeur de R_p on peut toujours, en lui ajoutant p termes identiquement nuls, l'écrire de la manière suivante :

$$R_p = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(m-i)(m-i-1)\ldots[(m-i)-(p-1)]}{1.2\ldots p} \Delta^{p+1} y_{i-1};$$

mais, si l'on pose $z_i = t_i$, et si l'on remplace m par $\frac{z_m - x_0}{\Delta z}$ et i par $\frac{t_i - x_0}{\Delta z}$, la différence $m - i$ deviendra $\frac{z_m - t_i}{\Delta z}$; par suite le produit

$$\frac{(m-i)(m-i-1)\ldots[(m-i)-(p-1)]}{1.2\ldots p} \Delta^{p+1} y_{i-1}$$

prendra la forme

$$\frac{(z_m - t_i)(z_m - t_i - \Delta z)\ldots[(z_m - t_i) - (p-1)\Delta z]}{1.2\ldots p} \cdot \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}} \Delta z,$$

que l'on peut remplacer par

$$\left[\frac{(z_m - t_i)^p}{1.2\ldots p} + \varepsilon\right] \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}} \Delta z;$$

et l'on trouve ainsi pour y_m, l'expression suivante :

$$(2) \qquad y_m = \theta(z_m) + \varepsilon + \sum_{t_i = z_1}^{t_i = z_m} \left[\frac{(z_m - t_i)^p}{1.2\ldots p} + \varepsilon\right] \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}} \Delta z.$$

4. Avant de poursuivre, je ferai remarquer que cette expression fournit, lorsqu'on passe à la limite, l'intégrale générale de l'équation (X) dans le cas où, y n'y entrant que par sa dérivée de l'ordre le plus élevé, elle se réduit à

$$\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = \mathrm{A}(x). \tag{3}$$

Puisque la différence $t_i - t_{i-1} = \Delta z = \Delta t$ s'évanouit avec Δz, et puisque $z_n = x$ et $y_n = y$, on peut remplacer dans l'équation (2)

$$y_m, \quad \theta(z_m), \quad z_m, \quad \frac{(z_m - t_i)^p}{1.2\ldots p} + \varepsilon \quad \text{et} \quad \Delta z,$$

respectivement par

$$y, \quad \theta(x), \quad x, \quad \frac{(x - t_{i-1})^p}{1.2\ldots p} + \varepsilon \quad \text{et} \quad \Delta t;$$

cette équation devient alors

$$y = \theta(x) + \varepsilon + \sum_{t_{i-1}=x_0}^{t_{i-1}=x} \left[\frac{(x - t_{i-1})^p}{1.2\ldots p} + \varepsilon\right] \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta t^{p+1}} \Delta t.$$

Lorsque n croît indéfiniment, les diverses valeurs du rapport $\frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta t^{p+1}}$ tendent, en vertu de l'équation (3), vers les diverses valeurs de $\mathrm{A}(t_{i-1})$, et comme aucune de celles-ci n'est infinie, on pourra, à la limite, supprimer les infiniment petits ε qui figurent dans la dernière équation, et y remplacer le signe $\sum$ par le signe $\int$.

On obtient ainsi, pour l'intégrale cherchée, la valeur connue

$$y = \theta(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^p}{1.2\ldots p} \mathrm{A}(t)\, dt. \tag{4}$$

5. Puisque la formule (1) est applicable à toutes les fonctions d'une variable, et puisque p y représente un entier positif quelconque, on peut y remplacer les diverses valeurs de y par les valeurs correspondantes du quotient $\frac{\Delta^q y}{\Delta z^q}$, et p par $p-q$, si toutefois q est moindre que p. Si, de plus, on a égard à ce que, Δz étant une constante, on a

$$\Delta^r \frac{\Delta^q y_k}{\Delta z^q} = \frac{\Delta^{q+r} y_k}{\Delta z^q},$$

on trouvera

$$S_{p-q} = \frac{\Delta^q y_0}{\Delta z^q} + \frac{m}{1}\frac{\Delta^{q+1} y_0}{\Delta z^q} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{\Delta^{q+2} y_0}{\Delta z^q} + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-p+q+1)}{1.2\ldots(p-q)}\frac{\Delta^p y_0}{\Delta z^q},$$

$$R_{p-q} = \frac{(m-1)\ldots(m-p+q)}{1.2\ldots(p-q)}\frac{\Delta^{p+1} y_0}{\Delta z^q} + \frac{(m-2)\ldots(m-p+q-1)}{1.2\ldots(p-q)}\frac{\Delta^{p+1} y_1}{\Delta z^q} + \ldots$$

$$+ \frac{(p-q)\ldots 2.1}{1.2\ldots(p-q)}\frac{\Delta^{p+1} y_{m-p+q-1}}{\Delta z^q},$$

et

$$(5) \qquad \frac{\Delta^q y_m}{\Delta z^q} = S_{p-q} + R_{p-q}.$$

En reproduisant les raisonnements et les calculs qui ont conduit de la formule (1) à la formule (2), on transformera la formule (5).

D'abord, à l'aide de l'équation

$$r = \frac{z_r - x_0}{\Delta z}$$

et de la dérivée $q^{ième}$ de l'équation (A), on prouvera que l'on a

$$S_{p-q} = \left[\frac{d^q\theta(z)}{dz^q}\right]_m + \varepsilon;$$

$\left[\frac{d^q\theta(z)}{dz^q}\right]_m$ représentant la valeur de $\frac{d^q\theta(z)}{dz^q}$ correspondante à $z = z_m$.

On prouvera ensuite que R_{p-q} peut prendre la forme

$$\sum_{t_i=z_1}^{t_i=z_m}\left[\frac{(z_m-t_i)^{p-q}}{1.2\ldots(p-q)} + \varepsilon\right]\frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}}\Delta z;$$

et l'on trouvera ainsi la formule suivante

$$(B) \qquad \frac{\Delta^q y_m}{\Delta z^q} = \left[\frac{d^q\theta(z)}{dz^q}\right]_m + \varepsilon + \sum_{t_i=z_1}^{t_i=z_m}\left[\frac{(z_m-t_i)^{p-q}}{1.2\ldots(p-q)} + \varepsilon\right]\frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}}\Delta z,$$

où l'on pourra attribuer à q les valeurs entières $0, 1, 2, \ldots, p$; car, moyennant des conventions bien connues, on peut considérer l'équation (2) et l'équation évidente

$$\frac{\Delta^p y_m}{\Delta z^p} = \frac{\Delta^p y_0}{\Delta z^p} + \left[\frac{\Delta^{p+1} y_0}{\Delta z^{p+1}} + \frac{\Delta^{p+1} y_1}{\Delta z^{p+1}} + \ldots + \frac{\Delta^{p+1} y_{m-1}}{\Delta z^{p+1}}\right] \Delta z$$

comme n'étant que des cas particuliers de l'équation (B).

CHAPITRE II.

Transformation de l'équation (X').

6. Dans le chapitre précédent y désignait une fonction quelconque de la variable indépendante; je supposerai maintenant que cette fonction satisfait à l'équation

$$(\mathrm{X}') \quad \frac{\Delta^{p+1} y}{\Delta x^{p+1}} = \mathrm{A}(x) + \mathrm{A}_0(x) y + \mathrm{A}_1(x) \frac{\Delta y}{\Delta x} + \mathrm{A}_2(x) \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \ldots + \mathrm{A}_p(x) \frac{\Delta^p y}{\Delta x^p}.$$

L'objet du présent chapitre est de faire connaître une équation qu'on peut toujours substituer à la précédente lorsque les valeurs de x forment une progression arithmétique.

Je ferai usage de deux fonctions que je représenterai, l'une par $\mathrm{F}(z)$, l'autre par $f(z, t)$, et qui se déduisent simplement du second membre de l'équation (X').

Pour former la première, je remplace, dans le second membre de (X'), x par z et $\frac{\Delta^q y}{\Delta x^q}$ par $\frac{d^q \theta(z)}{dz^q}$; j'ai ainsi

$$(\mathrm{C}) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{F}(z) = {} & \mathrm{A}(z) + \mathrm{A}_0(z) \,.\, \theta(z) + \mathrm{A}_1(z) \frac{d\theta(z)}{dz} + \mathrm{A}_2(z) \frac{d^2\theta(z)}{dz^2} + \ldots \\ & + \mathrm{A}_p(z) \frac{d^p \theta(z)}{dz^p}. \end{aligned} \right.$$

Pour former la seconde, je néglige, dans le second membre de (X'), le terme $\mathrm{A}(x)$, j'y remplace x par z et $\frac{\Delta^q y}{\Delta x^q}$ par $\frac{(z-t)^{p-q}}{1.2\ldots(p-q)}$, ce qui me donne

$$
(\mathrm{D})\left\{\begin{aligned}
f(z,t) &= \mathrm{A}_0(z)\,\frac{(z-t)^p}{1.2\ldots p}+\mathrm{A}_1(z)\,\frac{(z-t)^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}+\mathrm{A}_2(z)\,\frac{(z-t)^{p-2}}{1.2\ldots(p-2)}+\ldots\\
&\quad+\mathrm{A}_{p-1}(z)\,\frac{(z-t)}{1}+\mathrm{A}_p(z).
\end{aligned}\right.
$$

On remarquera, comme conséquence des hypothèses faites sur les coefficients de l'équation (X′) (n° **2**), que ces deux fonctions n'auront que des valeurs finies.

Ceci posé, je multiplie les deux membres de l'équation (B) par $\mathrm{A}_q(z_m)$, ce qui me donne

$$
\mathrm{A}_q(z_m)\,\frac{\Delta^q y_m}{\Delta z^q}
$$

$$
=\mathrm{A}_q(z_m)\left[\frac{d^q\theta(z)}{dz^q}\right]_m+\varepsilon+\sum_{t_i=z_1}^{t_i=z_m}\left[\mathrm{A}_q(z_m)\,\frac{(z_m-t_i)^{p-q}}{1.2\ldots(p-q)}+\varepsilon\right]\frac{\Delta^{p+1}y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}}\,\Delta z,
$$

car $\mathrm{A}_q(z_m)$ étant finie, tous les produits $\mathrm{A}_q(z_m).\varepsilon$ ont pu être remplacés par ε.

Je remplace successivement dans l'équation précédente q par 0, 1, $2,\ldots, p$, j'ajoute membre à membre les résultats et l'identité

$$
\mathrm{A}(z_m)=\mathrm{A}(z_m);
$$

et, en ayant égard aux équations (X′), (C) et (D), je trouve, après réduction, l'équation suivante

$$
(6)\qquad \frac{\Delta^{p+1}y_m}{\Delta z^{p+1}}=\mathrm{F}(z_m)+\varepsilon+\sum_{t_i=z_1}^{t_i=z_m}\left[f(z_m,t_i)+\varepsilon\right]\frac{\Delta^{p+1}y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}}\,\Delta z,
$$

d'où je pourrai déduire, en y remplaçant m par $0, 1, 2,\ldots, n$, $n+1$ équations contenant les $n+1$ rapports $\frac{\Delta^{p+1}y_0}{\Delta z^{p+1}}, \frac{\Delta^{p+1}y_1}{\Delta z^{p+1}},\ldots, \frac{\Delta^p y_n}{\Delta z^{p+1}}$. L'élimination, entre ces équations, des n premiers de ces rapports me fournira une valeur du dernier que je pourrai substituer à l'équation (X′), car $z_n=x$ et $y_n=y$.

7. Pour faciliter cette élimination que je ne ferai que partiellement, et surtout pour faciliter la recherche de ce que le résultat devient à la limite, je me servirai des fonctions définies par les équations suivantes, où la notation $[G(x, a)]_{a=b}$ exprime que b doit être substituée à a dans $G(x, a)$:

$$(\mathrm{E})\qquad \left\{\begin{array}{l} f_0(x, z) = f(x, z), \\ f_1(x, z) = \left[\int_z^x f_0(x, z) f(z, t)\, dz\right]_{t=z}, \\ f_2(x, z) = \left[\int_z^x f_1(x, z) f(z, t)\, dz\right]_{t=z}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f_{q+1}(x, z) = \left[\int_z^x f_q(x, z) f(z, t)\, dz\right]_{t=z}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \end{array}\right.$$

Ces fonctions satisfont aux deux équations suivantes, où r et s désignent deux entiers positifs ou négatifs, mais finis, et z_i une valeur fixe de z,

$$(7)\qquad \sum_{z_m=x_0}^{z_m=x+r\Delta z} [F(z_m)+\varepsilon][f_q(x, z_m)+\varepsilon]\,\Delta z = \varepsilon + \int_{x_0}^x F(z) f_q(x, z)\, dz,$$

$$(8)\qquad \left\{\sum_{z_m=z_i}^{z_m=x+r\Delta z} [f(z_m, t_i)+\varepsilon][f_q(x, z_m)+\varepsilon]\,\Delta z\right\}_{t_i=z_i} = \varepsilon + f_{q+1}(x, z_i+s\Delta z).$$

Pour démontrer que ces équations sont toujours vraies, je ferai remarquer d'abord que, puisque $f(z, t)$ est finie quels que soient z et t, si de plus $f_q(x, z)$ l'est aussi, les éléments de l'intégrale

$$\int_z^x f_q(x, z) f(z, t)\, dz$$

seront tous infiniment petits quels que soient z et t, et par suite $f_{q+1}(x, z)$ sera finie et continue; or $f_0(x, z)$ est finie, donc les fonctions $f_0, f_1, f_2, \dots$, sont finies, et, à partir de la seconde, elles sont continues.

Ce point fixé, et comme $F(z_m)$ est finie, on voit que les premiers membres des équations (7) et (8) peuvent s'écrire

$$\varepsilon + \int_{x_0}^{x+r\,dz} \mathrm{F}(z) f_q(x, z)\,dz \quad \text{et} \quad \left[\varepsilon + \int_{z_i}^{x+r\,dz} f(z, t_i) f_q(x, z)\,dz\right]_{t_i = z_i},$$

et, en retranchant de chaque intégrale un nombre fini r d'éléments infiniment petits, ces premiers membres auront pour expressions

$$\varepsilon + \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(z) f_q(x, z)\,dz \quad \text{et} \quad \varepsilon + f_{q+1}(x, z_i).$$

L'équation (7) est donc démontrée. Pour achever de démontrer l'équation (8), il suffit de faire remarquer que la différence

$$f_{q+1}(x, z + s\Delta z) - f_{q+1}(x, z)$$

est infiniment petite, puisque s est un nombre fini et $f_{q+1}(x, z)$ une fonction continue de z.

Les équations (7) et (8) vont me suffire pour faire l'élimination que j'ai en vue, mais, dans le chapitre suivant, je reviendrai sur les fonctions définies par les équations (E).

8. Lorsqu'on remplace m par n dans l'équation (6) elle devient

$$\frac{\Delta^{p+1} y_n}{\Delta z^{p+1}} = \mathrm{F}(z_n) + \varepsilon + \sum_{t_i = z_1}^{t_i = z_n} [f(z_n, t_i) + \varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}} \Delta z;$$

mais on a $y_n = y$, $\Delta z = \Delta x$, $z_0 = x_0$, $z_n = x$ et $t_i = z_i$; et, comme $f(z, t)$ est une fonction entière de t, on peut substituer $f(x, z_{i-1}) + \varepsilon$ à $f(z_n, t_i)$; en faisant ces changements dans l'équation précédente, et en ayant égard à la première des équations (E), on trouvera

$$\frac{\Delta^{p+1} y}{\Delta x^{p+1}} = \mathrm{F}(x) + \varepsilon + \sum_{z_{i-1} = x_0}^{z_{i-1} = x - \Delta z} [f_0(x, z_{i-1}) + \varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}} \Delta z;$$

et cette dernière équation deviendra, en remplaçant $i - 1$ par m,

$$(9) \qquad \frac{\Delta^{p+1} y}{\Delta x^{p+1}} = \mathrm{F}(x) + \varepsilon + \sum_{z_m = x_0}^{z_m = x - \Delta z} [f_0(x, z_m) + \varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} \Delta z.$$

Je multiplie les deux membres de l'équation (6) par $[f_0(x, z_m)+\varepsilon]\Delta z$; j'ai ainsi

$$[f_0(x, z_m)+\varepsilon]\frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}}\Delta z = [\mathrm{F}(z_m)+\varepsilon][f_0(x, z_m)+\varepsilon]\Delta z$$
$$+\sum_{t_i=z_1}^{t_i=z_m}[f(z_m, t_i)+\varepsilon][f_0(x, z_m)+\varepsilon]\Delta z\frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}}\Delta z.$$

En remplaçant dans cette dernière équation m par $0, 1, 2,\ldots, n-1$, et en ajoutant les résultats membre à membre, la somme des premiers membres sera

$$\sum_{z_m=x_0}^{z_m=x-\Delta z}[f_0(x, z_m)+\varepsilon]\frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}}\Delta z;$$

la somme des termes, placés dans les seconds membres en dehors des signes $\sum$, aura pour expression

$$\sum_{z_m=x_0}^{z_m=x-\Delta z}[\mathrm{F}(z_m)+\varepsilon][f_0(x, z_m)+\varepsilon]\Delta z,$$

ou, en vertu de l'équation (7),

$$\varepsilon+\int_{x_0}^{x}\mathrm{F}(z)f_0(x, z)\,dz;$$

enfin le coefficient de $\frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}}\Delta z$ aura pour valeur

$$\sum_{z_m=z_i}^{z_m=x-\Delta z}[f(z_m, t_i)+\varepsilon][f_0(x, z_m)+\varepsilon]\Delta z,$$

ou, en vertu de l'équation (8),

$$\varepsilon+f_1(x, z_{i-1}).$$

Le résultat de tout ce calcul sera donc

$$\sum_{z_m=x_0}^{z_m=x-\Delta z} [f_0(x, z_m)+\varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} \Delta z$$

$$= \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(z) f_0(x, z)\, dz + \varepsilon + \sum_{z_{i-1}=x_0}^{z_{i-1}=x-2\Delta z} [f_1(x, z_{i-1})+\varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}} \Delta z.$$

En ayant égard à cette équation, et en y remplaçant $i-1$ par m, l'équation (9) deviendra

$$(10)\quad \frac{\Delta^{p+1} y}{\Delta z^{p+1}} = \mathrm{F}(x)+\varepsilon+\int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(z) f_0(x, z)\, dz+\varepsilon+\sum_{z_m=x_0}^{z_m=x-2\Delta z} [f_1(x, z_m)+\varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} \Delta z$$

Je reprends l'équation (8) et je multiplie ses deux membres par

$$[f_1(x, z_m)+\varepsilon] \Delta z,$$

ce qui me donne

$$[f_1(x, z_m)+\varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} \Delta z = [\mathrm{F}(z_m)+\varepsilon][f_1(x, z_m)+\varepsilon] \Delta z$$

$$+ \sum_{t_i=z_1}^{t_i=z_m} [f(z_m, t_i)+\varepsilon][f_1(x, z_m)+\varepsilon] \Delta z \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}} \Delta z.$$

En remplaçant dans cette équation m par $0, 1, 2, \ldots, n-2$, et en ajoutant les résultats, on verra que la somme des premiers membres, celle des termes placés dans les seconds membres en dehors des signes $\sum$, et le coefficient de $\frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}} \Delta z$, ont respectivement pour expressions

$$\sum_{z_m=x_0}^{z_m=x-2\Delta z} [f_1(x, z_m)+\varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} \Delta z,$$

$$\sum_{z_m=x_0}^{z_m=x-2\Delta z} [\mathrm{F}(z_m)+\varepsilon][f_1(x, z_m)+\varepsilon] \Delta z,$$

$$\sum_{z_m=z_i}^{z_m=x-2\Delta z} [f(z_m, t_i)+\varepsilon][f_1(x, z_m)+\varepsilon] \Delta z,$$

et ces deux dernières pourront être remplacées, en vertu des équations (7) et (8), par

$$\varepsilon + \int_{x_0}^{x} F(z) f_1(x, z)\, dz \quad \text{et} \quad \varepsilon + f_2(x, z_{i-1});$$

ce nouveau calcul conduira donc à l'équation

$$\sum_{z_m = x_0}^{z_m = x - 2\Delta z} [f_1(x, z_m) + \varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} \Delta z$$
$$= \int_{x_0}^{x} F(z) f_1(x, z)\, dz + \varepsilon + \sum_{z_{i-1} = x_0}^{z_{i-1} = x - 3\Delta z} [f_2(x, z_{i-1}) + \varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}} \Delta z;$$

et celle-ci, après substitution de m à $i-1$, permettra de remplacer l'équation (10) par la suivante

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\Delta^{p+1} y}{\Delta x^{p+1}} = F(x) + \varepsilon + \displaystyle\int_{x_0}^{x} F(z) f_0(x, z)\, dz + \varepsilon \\ \qquad + \displaystyle\int_{x_0}^{x} F(z) f_1(x, z)\, dz + \varepsilon + \sum_{z_m = x_0}^{z_m = x - 3\Delta z} [f_2(x, z_m) + \varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} \Delta z. \end{cases}$$

Les raisonnements et les calculs qui m'ont conduit de l'équation (9) à l'équation (10), et de celle-ci à l'équation (11), peuvent être répétés autant de fois qu'on voudra; par analogie on peut donc poser

$$(\mathrm{F})\quad \begin{cases} \dfrac{\Delta^{p+1} y}{\Delta x^{p+1}} = F(x) + \varepsilon + \displaystyle\int_{x_0}^{x} F(z) f_0(x, z)\, dz + \varepsilon \\ \qquad + \displaystyle\int_{x_0}^{x} F(z) f_1(x, z) + \varepsilon + \int_{x_0}^{x} F(z) f_2(x, z)\, dz + \varepsilon + \ldots \\ \qquad + \displaystyle\int_{x_0}^{x} F(z) f_{q-1}(x, z)\, dz + \varepsilon + \sum_{z_m = x_0}^{z_m = x - (q+1)\Delta z} [f_q(x, z_m) + \varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} \Delta z. \end{cases}$$

Il est d'ailleurs aisé de démontrer en toute rigueur que cette équation est toujours vraie.

D'abord, quand on y pose $q = 2$, elle coïncide avec l'équation (11); pour prouver que l'équation (F) est générale, il suffit donc d'établir que si elle est vraie pour une valeur de q, elle l'est encore pour la valeur suivante.

A cet effet, on multipliera les deux membres de l'équation (6) par $[f_q(x, z_m) + \varepsilon]\Delta z$; on aura ainsi une nouvelle équation où l'on remplacera successivement m par $0, 1, 2, \ldots, n - q - 1$. On additionnera les résultats; la somme des premiers membres sera

$$\sum_{z_m = x_0}^{z_m = x - (q+1)\Delta z} [f_q(x, z_m) + \varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} \Delta z,$$

et des raisonnements semblables à ceux que j'ai déjà faits deux fois montreront que, à l'aide des équations (7) et (8), la somme des seconds membres peut s'écrire

$$\int_{x_0}^{x} F(z) f_q(x, z)\, dz + \varepsilon + \sum_{z_m = x_0}^{z_m = x - (q+2)\Delta z} [f_{q+1}(x, z_m) + \varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} \Delta z;$$

or la substitution, dans l'équation (F), de cette dernière expression à la précédente, fournit le même résultat que la substitution, dans la même équation, de $q + 1$ à q : donc l'équation (F) est générale.

CHAPITRE III.

Intégration de l'équation (X).

9. Je viens de prouver que les équations (F) et (X′) sont équivalentes quelle que soit la constante Δx; l'équation différentielle

$$(\mathrm{X}) \quad \frac{d^{p+1} y}{dx^{p+1}} = A(x) + A_0(x) y + A_1(x) \frac{dy}{dx} + A_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots + A_p(x) \frac{d^p y}{dx^p}$$

est donc équivalente à ce que devient l'équation (F) lorsqu'on y pose $\Delta x = 0$, car, à cette limite, l'équation (X′) se confond avec l'équation (X).

Je vais montrer que, à la limite, le second membre de l'équation (F) peut être remplacé par une série convergente. Ma démonstration sera fondée sur deux lemmes, savoir :

1° Les fonctions définies par les équations (E) sont les termes d'une série convergente;

2° Toutes les valeurs du rapport $\frac{\Delta^{p+1} y}{\Delta z^{p+1}}$ sont finies.

10. 1° Si l'on suppose, pour plus de clarté, que u et v sont les coordonnées rectangulaires d'un point du plan, chaque valeur de la variable de la forme $u+v\sqrt{-1}$ sera représentée par un point, et la droite joignant deux de ces points sera le module de la différence des valeurs qu'ils représentent. En conséquence, en désignant par s l'arc commençant au point fixe x, se terminant au point variable z, et le long duquel toutes les intégrales sont prises, on aura

$$\text{mod.}\, dz = \text{mod.}\,(-dz) = ds.$$

Et puisque, pour toutes les valeurs de z et de t que l'on considère, $f(z,\ t)$ est finie, son module ne peut surpasser un nombre fini M.

Ceci posé, je dis d'abord que, s'il existe une fonction réelle et positive de s, $G(s)$, dont les valeurs surpassent les valeurs correspondantes du module de $f_q(x,\ z)$, les valeurs de la fonction $M\int_0^s G(s)\,ds$ surpasseront les valeurs correspondantes du module de $f_{q+1}(x,\ z)$.

En effet on a, quel que soit t,

$$\text{mod.}\,[-f_q(x,\ z)\,f(z,\ t)\,dz] < MG(s)\,ds;$$

les modules des éléments de l'intégrale

$$\int_z^x f_q(x,\ z)\,f(z,\ t)\,dz = \int_x^z [-f_q(x,\ z)\,f(z,\ t)]\,dz$$

sont donc plus petits, quel que soit t, que les éléments correspondants de l'intégrale

$$\int_0^s MG(s)\,ds,$$

et comme le module d'une somme est moindre que la somme des modules de ses termes, on a

$$\text{mod.}\, f_{q+1}(x, z) < \mathrm{M}\int_0^s \mathrm{G}(s)\, ds.$$

En se fondant sur cette inégalité et sur ce que le module de $f_0(x, z)$ est plus petit que M, on établira sans peine que les termes de la série convergente

$$\mathrm{M} e^{\mathrm{M}s} = \mathrm{M} + \mathrm{M}\frac{\mathrm{M}s}{1} + \mathrm{M}\frac{\mathrm{M}^2 s^2}{1.2} + \ldots$$

sont respectivement plus grands que les valeurs correspondantes des modules des fonctions

$$f_0, \quad f_1, \quad f_2, \ldots$$

On peut donc poser

$$(\mathrm{G}) \qquad \varphi(x, z) = f_0(x, z) + f_1(x, z) + f_2(x, z) + \ldots,$$

et $\varphi(x, z)$ désigne une fonction de valeur finie.

Cette conclusion est indépendante de la forme de la ligne d'intégration; elle ne suppose qu'une chose, c'est qu'en chaque point de cette ligne les coefficients de l'équation (X) ont des valeurs finies. Mais on se souvient que toujours, pour nous, la ligne d'intégration est droite.

11. 2° Je désigne par N et M_1 des nombres plus grands que les plus grands modules des valeurs, toujours finies, de

$$\mathrm{F}(z_m) + \varepsilon \quad \text{et} \quad f(z_m, t_i).$$

En posant

$$\text{mod.}\,\Delta z = \Delta s,$$

et en me fondant sur ce que le module d'une somme est moindre que la somme des modules de ses termes, je déduis de l'équation (6)

$$\text{mod.}\,\frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} < \mathrm{N} + \mathrm{M}_1 \Delta s \sum_{i-1=0}^{i-1=m-1} \text{mod.}\,\frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}}.$$

Je vais prouver d'abord que si K est un nombre fini plus grand que le second membre de cette inégalité, $Ke^{M_1 \Delta s}$ est un nombre plus grand que le second membre de l'inégalité

$$\text{mod.}\, \frac{\Delta^{p+1} y_{m+1}}{\Delta z^{p+1}} < N + M_1 \Delta s \sum_{i-1=0}^{i-1=m} \text{mod.}\, \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}}$$

qui se déduit de la première en y remplaçant m par $m+1$.

En effet, la seconde inégalité peut s'écrire

$$\text{mod.}\, \frac{\Delta^{p+1} y_{m+1}}{\Delta z^{p+1}} < \left[N + M_1 \Delta s \sum_{i-1=0}^{i-1=m-1} \text{mod.}\, \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}} \right] + M_1 \Delta s . \left[\text{mod.}\, \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} \right];$$

or ce second membre est moindre que

$$K(1 + M_1 \Delta s),$$

et, *à fortiori*, moindre que

$$Ke^{M_1 \Delta s},$$

car $e^{M_1 \Delta s}$ est la somme d'une série à termes tous positifs, et dont les deux premiers sont

$$1 + M_1 \Delta s.$$

Il est aisé de voir maintenant que les valeurs des rapports

$$\frac{\Delta^{p+1} y_0}{\Delta z^{p+1}},\quad \frac{\Delta^{p+1} y_1}{\Delta z^{p+1}},\quad \frac{\Delta^{p+1} y_2}{\Delta z^{p+1}},\ \ldots,\quad \frac{\Delta^{p+1} y_{n-(q+1)}}{\Delta z^{p+1}},$$

sont toutes finies. Car le module de la première étant moindre que N, on prouvera de proche en proche, à l'aide de la proposition que je viens de démontrer, que les modules de ces valeurs sont respectivement moindres que

$$N,\ Ne^{M_1 \Delta s},\ Ne^{M_1 2\Delta s}, \ldots,\ Ne^{M_1 [n-(q+1)] \Delta s}$$

ou que

$$N,\ N(e^{M_1})^{s'_1},\ N(e^{M_1})^{s'_2}, \ldots,\ N(e^{M_1})^{s'_{n-q-1}},$$

en représentant généralement par s'_r la distance du point x_0 au point z_r.

On voit, pour le dire en passant, que, s_r et s'_r désignant les distances du point intermédiaire z_r aux extrémités de la droite x_0x, en représentant par S la longueur de cette droite, on a

$$s_r + s'_r = \mathrm{S}.$$

12. De l'équation (G) je déduis

$$\begin{aligned}
&\mathrm{F}(x) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(z)\varphi(x, z)\,dz \\
&= \mathrm{F}(x) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(z) f_0(x, z)\,dz + \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(z) f_1(x, z)\,dz + \ldots \\
&\quad + \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(z) f_{q-1}(x, z)\,dz + \ldots.
\end{aligned}$$

Il est évident que le second membre est une série convergente; je vais prouver que $\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}}$ en est la somme.

D'abord, puisque cette série est convergente, l'équation précédente peut s'écrire

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{F}(x) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(z)\varphi(x, z)\,dz \\
&= \mathrm{F}(x) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(z) f(x, z)dz + \ldots + \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(z) f_{q-1}(x, z)\,dz + ce^{u\sqrt{-1}},
\end{aligned}\right.$$

c désignant un nombre positif qui, pour une valeur finie de q et pour les valeurs plus grandes, est moindre qu'un nombre donné aussi petit qu'on voudra.

Ensuite, puisque les modules des quantités

$$f_q(x, z_m) \quad \text{et} \quad \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}}$$

sont plus petits que

$$M\,\frac{M^q s_m^q}{1.2\ldots q} \quad \text{et} \quad N\,(e^{M_1})^{s'_m},$$

et, *à fortiori*, plus petits que

$$M\,\frac{M^q S^q}{1.2\ldots q} \quad \text{et} \quad N\,(e^{M_1})^{S},$$

on a, en désignant, pour abréger, par C la constante $MN\,(e^{M_1})^S$,

$$\text{mod.}\left[f_q(x,\,z_m)\,\frac{\Delta^{p+1}y_m}{\Delta z^{p+1}}\,\Delta z\right] < C\,\frac{M^q S^q}{1.2\ldots q}\,\Delta s.$$

En conséquence, le terme complémentaire de l'équation (F), savoir

$$\sum_{z_m=x_0}^{z_m=x-(q+1)\Delta z} \left[f_q(x,\,z_m)+\varepsilon\right]\frac{\Delta^{p+1}y_m}{\Delta z^{p+1}}\,\Delta z,$$

qu'on peut écrire de la manière suivante, puisque le produit $\varepsilon\,\frac{\Delta^{p+1}y_m}{\Delta z^{p+1}}\,\Delta z$ est un infiniment petit du second ordre,

$$\varepsilon + \sum_{z_m=x_0}^{z_m=x} f_q(x,\,z_m)\,\frac{\Delta^{p+1}y_m}{\Delta z^{p+1}}\,\Delta z,$$

a pour module un nombre moindre que

$$C\,\frac{M^q S^q}{1.2\ldots q}\sum_{z_m=x_0}^{z_m=x}\Delta s = CS\,\frac{M^q S^q}{1.2\ldots q}.$$

L'équation (F) peut donc prendre la forme

$$\frac{\Delta^{p+1}y}{\Delta x^{p+1}} = F(x)+\int_{x_0}^{x}F(z)f_0(x,\,z)\,dz+\int_{x_0}^{x}F(z)f_1(x,\,z)\,dz+\ldots$$
$$+\int_{x_0}^{x}F(z)f_{q-1}(x,\,z)\,dz+(q+2)\,\varepsilon'+c'e^{\alpha'\sqrt{-1}},$$

c' désignant un nombre positif qui, pour une valeur finie de q et pour les valeurs plus grandes, est plus petit qu'un nombre donné aussi petit qu'on voudra, et ε' la moyenne des ε placés dans l'équation (F).

En retranchant la dernière équation de l'équation (12), on trouve

$$\mathrm{F}(x)+\int_{x_0}^{x}\mathrm{F}(z)\,\varphi(x,z)\,dz-\frac{\Delta^{p+1}y}{\Delta x^{p+1}}=ce^{\alpha\sqrt{-1}}-c'e^{\alpha'\sqrt{-1}}-(q+2)\varepsilon'$$

pour toutes les valeurs de Δx et de q.

Si maintenant on pose $\Delta x=0$, on aura, pour toutes les valeurs finies de q,

$$\mathrm{F}(x)+\int_{x_0}^{x}\mathrm{F}(z)\,\varphi(x,z)\,dz-\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}}=ce^{\alpha\sqrt{-1}}-c'e^{\alpha'\sqrt{-1}}.$$

Le second membre de cette équation est identiquement nul, puisque c et c' sont plus petits que des nombres donnés quelconques pour des valeurs finies de q. On a donc finalement

$$\text{(H)}\qquad \frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}}=\mathrm{F}(x)+\int_{x_0}^{x}\mathrm{F}(z)\,\varphi(x,z)\,dz.$$

13. En intégrant les deux membres de l'équation (H) de x_0 à x, et en se souvenant que a_p est la valeur initiale de $\frac{d^p y}{dx^p}$, on trouve

$$\frac{d^p y}{dx^p}=a_p+\int_{x_0}^{x}\mathrm{F}(x)\,dx+\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}\mathrm{F}(z)\,\varphi(x,z)\,dz.$$

Une nouvelle intégration introduirait la constante a_{p-1} et donnerait

$$\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}=a_{p-1}+a_p\frac{x-x_0}{1}+\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}\mathrm{F}(x)\,dx$$
$$+\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}\mathrm{F}(z)\,\varphi(x,z)\,dz.$$

Enfin, en représentant par $\psi_0(x)$ et par $\Psi(x)$ les résultats obtenus en intégrant $p+1$ fois, et chaque fois de x_0 à x,

$$F(x) \quad \text{et} \quad \int_{x_0}^{x} F(z)\,\varphi(x, z)\,dz,$$

la valeur de y s'écrira, en ayant égard à l'équation (A),

$$(J) \qquad y = \theta(x) + \psi_0(x) + \Psi(x).$$

Si l'on voulait cette valeur développée en série convergente, on intégrerait $(p+1)$ fois, et chaque fois de x_0 à x, les quantités

$$F(x), \quad \int_{x_0}^{x} F(z) f_0(x, z)\,dz, \quad \int_{x_0}^{x} F(z) f_1(x, z)\,dz, \ldots,$$

et, en représentant les résultats par

$$\psi_0(x), \ \psi_1(x), \ \psi_2(x), \ldots,$$

on aurait, en vertu de l'équation (12),

$$(J') \qquad y = \theta(x) + \psi_0(x) + \psi_1(x) + \psi_2(x) + \ldots.$$

14. Les équations (H) et (J) font voir qu'une fonction est déterminée lorsqu'elle est assujettie à satisfaire à une équation linéaire donnée de l'ordre $p+1$, et lorsqu'on connaît sa valeur et celles de ses p premières dérivées pour une valeur donnée de la variable indépendante. Les mêmes équations montrent encore que le calcul de cette fonction se réduit à $p+2$ quadratures [ou à deux seulement si l'on fait usage de l'équation (4)], dès qu'on connaît les deux fonctions auxiliaires $\varphi(x, z)$ et $F(x)$.

S'il y avait quelque utilité à imposer des noms à ces dernières, je nommerais l'une, $\varphi(x, z)$, la *fonction générique*, et l'autre, $F(x)$, la *fonction individuelle*.

Ces dénominations sont faciles à justifier. Toutes les fonctions qui satisfont à l'équation (X), en y considérant $A(x)$ comme une fonction arbitraire, et les coefficients de y et de ses dérivées comme des fonctions données, peuvent composer un genre caractérisé par le système de ces coefficients; et ce qui distingue chaque fonction de ce genre des autres fonctions du même genre, ce sont le terme $A(x)$ de l'équation différentielle particulière à laquelle elle satisfait, et le système de sa valeur initiale a_0 et des valeurs initiales $a_1, a_2, \ldots, a_p$ de ses p premières dérivées. Or les équations (H) et (J) montrent que toute solution y d'une équation linéaire est, si l'on peut parler ainsi, le résultat de la combinaison par voie de quadratures de deux fonctions, savoir :

La fonction $\varphi(x, z)$ qui, ne contenant ni constantes arbitraires ni le terme $A(x)$, est déterminée par le système des coefficients caractérisant le genre auquel appartient y;

La fonction $F(x)$, qui contient $A(x)$, la valeur initiale de la variable et les valeurs initiales de y et de ses p premières dérivées, en un mot tout ce qui individualise la fonction y.

Les fonctions composant un même genre pourraient être groupées en espèces, caractérisées chacune par le terme $A(x)$ de $F(x)$. Les fonctions appartenant à une même espèce satisferaient à une même équation différentielle particulière, elles ne seraient donc que les solutions renfermées dans l'intégrale générale de cette équation. Cette intégrale générale est fournie par l'équation (J), en y considérant a_0, $a_1, \ldots$, a_p comme des indéterminées; $F(x)$, qui est alors une fonction de $p+2$ variables indépendantes x, a_0, $a_1, \ldots$, pourrait être nommée dans ce cas la *fonction spécifique*.

Quoi qu'il en soit de l'utilité et de la convenance de ces dénominations, je n'en ferai pas usage.

$F(z)$ s'obtient sans calcul et de la manière la plus simple au moyen de l'équation (C); les équations (E) font connaître les termes de la série dont $\varphi(x, z)$ est la somme; le calcul sera, en général, très-laborieux. Avant de clore ce chapitre je vais donner une nouvelle définition de $\varphi(x, z)$ qui peut, dans quelques cas, en abréger la recherche.

15. Ce qui me reste à dire est fondé en partie sur la transformation suivante.

Si l'on a

$$u = \left[\int_z^x M(x, z, t)\, dz\right]_{t=z},$$

je dis qu'on pourra toujours poser

$$(13)\qquad \frac{du}{dz} = -\mathrm{M}(x, z, z) + \left[\int_z^x \frac{d\mathrm{M}(x, z, t)}{dt}\,dz\right]_{t=z}.$$

En désignant par $\mathrm{N}(x, z, t)$ l'intégrale générale de la différentielle $\mathrm{M}(x, z, t)\,dz$, on aura

$$\int_z^x \mathrm{M}(x, z, t)\,dz = \mathrm{N}(x, x, t) - \mathrm{N}(x, z, t),$$

et par suite

$$u = \mathrm{N}(x, x, z) - \mathrm{N}(x, z, z);$$

donc

$$\frac{du}{dz} = \left\{\left[\frac{d\mathrm{N}(x, z, t)}{dt}\right]_{z=x} - \left[\frac{d\mathrm{N}(x, z, t)}{dt}\right]_{z=z} - \left[\frac{d\mathrm{N}(x, z, t)}{dz}\right]_{z=z}\right\}_{t=z};$$

or

$$\left[\frac{d\mathrm{N}(x, z, t)}{dt}\right]_{z=x} - \left[\frac{d\mathrm{N}(x, z, t)}{dt}\right]_{z=z} = \int_z^x \frac{d\mathrm{M}(x, z, t)}{dt}\,dz,$$

et

$$\left[\frac{d\mathrm{N}(x, z, t)}{dz}\right]_{z=z} = \mathrm{M}(x, z, t);$$

donc enfin

$$\frac{du}{dz} = -\mathrm{M}(x, z, z) + \left[\int_z^x \frac{d\mathrm{M}(x, z, t)}{dt}\,dz\right]_{t=z};$$

et la formule (13) est démontrée.

On démontrerait de même la formule suivante

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{M}(x, x, z) + \left[\int_z^x \frac{d\mathrm{M}(x, z, t)}{dx}\,dx\right]_{t=z}.$$

16. La fonction $\varphi(x, z)$ a été définie par la série convergente dont elle est la somme; je vais montrer qu'elle satisfait à un système d'équations faciles à déduire de l'équation (X).

J'ajoute les équations (E), et, en ayant égard à l'équation (G), je trouve

$$\varphi(x, z) = f(x, z) + \left[\int_z^x \varphi(x, z) f(z, t)\, dz\right]_{t=z}.$$

Par suite, et en faisant usage de la formule (13),

$$\frac{d\varphi(x, z)}{dz} = \frac{df(x, z)}{dz} - \varphi(x, z) f(z, z) + \left[\int_z^x \varphi(x, z) \frac{df(z, t)}{dt}\, dz\right]_{t=z};$$

mais l'équation (D) me donne

$$f(z, z) = A_p(z),$$

donc

$$\frac{d\varphi(x, z)}{dz} + A_p(z)\varphi(x, z) = \frac{df(x, z)}{dz} + \left[\int_z^x \varphi(x, z) \frac{df(z, t)}{dt}\, dz\right]_{t=z}.$$

Un calcul semblable au précédent donnera

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\varphi(x, z)}{dz^2} + \frac{d A_p(z)\varphi(x, z)}{dz} - A_{p-1}(z)\varphi(x, z) \\ &= \frac{d^2 f(x, z)}{dz^2} + \left[\int_z^x \varphi(x, z) \frac{d^2 f(z, t)}{dt^2}\, dz\right]_{t=z}; \end{aligned}$$

et de proche en proche on sera conduit, quel que soit k, à l'équation

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^k\varphi}{dz^k} + \frac{d^{k-1}A_p\varphi}{dz^{k-1}} - \frac{d^{k-2}A_{p-1}\varphi}{dz^{k-2}} + \ldots + (-1)^{k-1}A_{p-k+1}\varphi \\ &= \frac{d^k f(x, z)}{dz^k} + \left[\int_z^x \varphi(x, z) \frac{d^k f(z, t)}{dt^k}\, dz\right]_{t=z}. \end{aligned}\right.$$

Lorsqu'on pose $z = x$, le second membre de cette équation se réduit évidemment à $\left[\frac{d^k f(x, z)}{dz^k}\right]_{z=x}$, ou, comme le montre l'équation (D), à $A_{p-k}(x)$; on a donc encore

$$(15)\quad \left[\frac{d^k\varphi}{dz^k} + \frac{d^{k-1}A_p\varphi}{dz^{k-1}} - \frac{d^{k-2}A_{p-1}\varphi}{dz^{k-2}} + \ldots + (-1)^{k-1}A_{p-k+1}\varphi\right]_{z=x} = A_{p-k}(x).$$

Comme $f(z, t)$ est une fonction entière et du degré p par rapport à t,

$$\frac{d^{p+1}f(z,\,t)}{dt^{p+1}}=0 \quad \text{et} \quad \frac{d^{p+1}f(x,\,z)}{dz^{p+1}}=0;$$

en conséquence, l'équation (14) devient, quand on y pose $k=p+1$,

$$(16)\qquad \frac{d^{p+1}\varphi}{dz^{p+1}}+\frac{d^{p}\mathrm{A}_{p}\varphi}{dz^{p}}-\frac{d^{p-1}\mathrm{A}_{p-1}\varphi}{dz^{p-1}}+\frac{d^{p-2}\mathrm{A}_{p-2}\varphi}{dz^{p-2}}-\ldots+(-1)^{p}\mathrm{A}_0\varphi=0.$$

Ainsi la fonction $\varphi(x,\,z)$ est, à l'égard de z, une des solutions de l'équation (16). Pour achever de la définir, on déterminera les $p+1$ quantités arbitraires indépendantes de z qui figurent dans l'intégrale générale de l'équation (16), en assujettissant cette intégrale générale à satisfaire aux $p+1$ équations obtenues en posant successivement dans l'équation (15) $k=0$, $k=1$, $k=2,\ldots$, $k=p$.

17. L'équation (16) est, comme l'équation (X), linéaire et de l'ordre $p+1$, et sa résolution présentera, en général, les mêmes difficultés; dans certains cas cependant la résolution de la première sera plus facile que celle de la seconde; c'est ce qui arriverait, par exemple, si l'équation (16) développée ne contenait pas de terme en φ. On pourrait donc se proposer de déduire une troisième équation de l'équation (16), comme celle-ci a été déduite de (X), puis de cette troisième d'en déduire une quatrième, et ainsi de suite, dans l'espérance de rencontrer une équation différentielle facile à résoudre, et dont l'intégrale générale conduirait, en remontant et de proche en proche, à l'intégrale demandée.

Cette espérance serait vaine, car je vais prouver qu'en opérant sur l'équation (16), comme on l'a fait sur l'équation (X), on retrouve celle-ci privée seulement du terme $\mathrm{A}(x)$.

La comparaison des deux équations (X) et (16) montre que l'on obtient la seconde lorsque, après suppression de $\mathrm{A}(x)$, on remplace dans l'équation (X) $-\mathrm{A}_{p-k}\dfrac{d^{p-k}y}{dx^{p-k}}$ par $+(-1)^k\dfrac{d^{p-k}\mathrm{A}_{p-k}\varphi}{dz^{p-k}}$; et on sait que le développement de cette dernière quantité est le même que celui de

$$(17)\qquad +(-1)^k\varphi\left(\frac{d}{dz}+\mathrm{A}_{p-k}\right)^{p-k},$$

en considérant, dans ce dernier, les exposants comme des indices de dérivées, et en y remplaçant $\frac{d^{p-k}\varphi}{dz^{p-k}}$ par $A_{p-k}\frac{d^{p-k}\varphi}{dz^{p-k}}$.

Si, dans l'équation (16) ainsi obtenue, on fait les mêmes changements, en substituant x et y à z et φ, le développement de l'expression (17) sera remplacé par celui de

$$(18)\qquad -y\left[\left(\frac{d}{dx}+A_{p-k}\right)-A_{p-k}\right]^{p-k},$$

et l'équation (X) sera reproduite.

En effet, le terme général de l'expression (17), savoir :

$$+(-1)^k C_i A^i_{p-k}\frac{d^{p-k-i}\varphi}{dz^{p-k-i}},$$

deviendra

$$-(-1)^{2k+i} C_i\, y\left[\frac{d}{dx}+(A^i_{p-k})\right]^{p-k-i},$$

et cette quantité peut être représentée symboliquement par le terme général de l'expression (18), savoir :

$$-(-1)^i C_i\, y\left(\frac{d}{dx}+A_{p-k}\right)^{p-k-i}A^i_{p-k},$$

puisque les symboles $(A^i_{p-k})^r$ et $A^r_{p-k}.A^i_{p-k}$ représentent tous deux

$$\frac{d^{i+r}A_{p-k}}{dx^{i+r}}.$$

CHAPITRE IV.

Intégration des équations linéaires du premier ordre et des équations linéaires à coefficients constants.

18. Lorsque $p=0$, les équations (X) et (D) se réduisent à

$$(19)\qquad \frac{dy}{dx}=A(x)+yA_0(x),$$

$$f(z,t)=A_0(z);$$

et en posant

$$A_0(z)\,dz = d\,P(z),$$

les valeurs de

$$f_0(x, z),\quad f_1(x, z),\quad f_2(x, z), \ldots,$$

fournies par les équations (E), seront

$$A_0(x),\quad A_0(x)[P(x) - P(z)],\quad A_0(x)\frac{[P(x)-P(z)]^2}{1.2}, \ldots;$$

l'équation (G) devient donc

$$\varphi(x, z) = A_0(x)\,e^{P(x)}.e^{-P(z)}.$$

Dans le même cas, les équations (A) et (C) se réduisent à

$$\theta(z) = a_0,$$
$$F(z) = A(z) + a_0 A_0(z),$$

et l'équation (H) à

$$(20)\quad \frac{dy}{dx} = A(x) + a_0 A_0(x) + A_0(x)\,e^{P(x)}\int_{x_0}^{x} e^{-P(z)}[A(z) + a_0 A_0(z)]\,dz.$$

En posant

$$A(z)\,e^{-P(z)}\,dz = d\,R(z)$$

et par suite

$$A(x) = e^{P(x)}\frac{d[R(x) - R(x_0)]}{dx},$$

puis en remarquant que de la valeur de $dP(z)$ on déduit

$$e^{-P(z)} A_0(z)\,dz = -\,de^{-P(z)}$$

et

$$A_0(x) = \frac{dP(x)}{dx},$$

l'équation (20) prendra successivement les formes suivantes

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{A}(x) + \mathrm{A}_0(x)e^{\mathrm{P}(x)}[\mathrm{R}(x) - \mathrm{R}(x_0)] + a_0 \mathrm{A}_0(x)e^{\mathrm{P}(x)}.e^{-\mathrm{P}(x_0)}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[\mathrm{R}(x) - \mathrm{R}(x_0)]}{dx}e^{\mathrm{P}(x)} + \frac{de^{\mathrm{P}(x)}}{dx}[\mathrm{R}(x) - \mathrm{R}(x_0)] + a_0 e^{-\mathrm{P}(x_0)}\mathrm{A}_0(x)e^{\mathrm{P}(x)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left\{e^{\mathrm{P}(x)}[\mathrm{R}(x) - \mathrm{R}(x_0)]\right\}}{dx} + a_0 e^{-\mathrm{P}(x_0)}\frac{de^{\mathrm{P}(x)}}{dx}.$$

L'équation (J) donne donc

$$(21)\quad y = a_0 + \int_{x_0}^{x} d\left\{e^{\mathrm{P}(x)}[\mathrm{R}(x) - \mathrm{R}(x_0)]\right\} + a_0 e^{-\mathrm{P}(x_0)}\int_{x_0}^{x} de^{\mathrm{P}(x)}.$$

En effectuant les intégrations et en remplaçant $\mathrm{P}(x)$ et $\mathrm{R}(x) - \mathrm{R}(x_0)$ par leurs valeurs, l'équation (21) fournit le résultat connu

$$y = e^{\int \mathrm{A}_0(x)dx}\left[a_0 e^{-\mathrm{P}(x_0)} + \int_{x_0}^{x} \mathrm{A}(x)e^{-\int \mathrm{A}_0(x)dx}dx\right].$$

19. Avant de passer à l'intégration des équations linéaires à coefficients constants, je vais définir une notation qui simplifie l'expression et qui facilite le calcul de certaines quantités se présentant sous la forme d'intégrales définies.

Lorsqu'un polynôme entier à coefficients constants

$$\mathrm{A}_0\frac{x^m}{1.2\ldots m} + \mathrm{A}_1\frac{x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} + \mathrm{A}_2\frac{x^{m-2}}{1.2\ldots m-2} + \ldots$$
$$+ \mathrm{A}_{m-2}\frac{x^2}{1.2} + \mathrm{A}_{m-1}\frac{x}{1} + \mathrm{A}_m$$

se déduira d'un second polynôme

$$\mathrm{A}_0 x^m + \mathrm{A}_1 x^{m-1} + \mathrm{A}_2 x^{m-2} + \ldots + \mathrm{A}_{m-2}x^2 + \mathrm{A}_{m-1}x + \mathrm{A}_m,$$

en divisant chaque terme de celui-ci par le produit de tous les nombres entiers n'excédant pas le degré de ce terme, je désignerai le premier de ces polynômes par $\Gamma f(x)\big)$ ou par $f\,\Gamma x\big)$, lorsque le second sera désigné par $f(x)$.

En conséquence, j'écrirai

$$(22)\qquad \int f\,\Gamma x\big)\,dx = \Gamma\, x f(x)\big] + \text{const.}$$

Soient deux polynômes entiers et à coefficients constants

$$f(x) = \mathrm{A}_0 x^m + \mathrm{A}_1 x^{m-1} + \ldots + \mathrm{A}_{m-1} x + \mathrm{A}_m,$$
$$\mathrm{F}(y) = \mathrm{B}_0 y^p + \mathrm{B}_1 y^{p-1} + \ldots + \mathrm{B}_{p-1} y + \mathrm{B}_p;$$

si, en désignant par a une constante, on a entre les deux variables x et y la relation

$$x + y = a,$$

on en déduira

$$(23)\qquad \frac{d^k \mathrm{F}\,\Gamma y\big)}{dx^k} = (-1)^k \frac{d^k \mathrm{F}\,\Gamma y\big)}{dy^k},$$

et l'intégrale générale

$$\int \mathrm{F}\,\Gamma y\big)\, f\,\Gamma x\big)\,dx$$

aura pour expression

$$\Gamma x f(x)\big) - \mathrm{F}\,\Gamma y\big) + \Gamma x^2 f(x)\big)\frac{d\mathrm{F}\,\Gamma y\big)}{dy} + \Gamma x^3 f(x)\big)\frac{d^2 \mathrm{F}\,\Gamma y\big)}{dy^2} + \ldots$$
$$+ \Gamma x^{p+1} f(x)\big)\frac{d^{p+1}\mathrm{F}\,\Gamma y\big)}{dy^{p+1}} + \text{const.},$$

comme on le verra en intégrant par parties et en ayant égard aux équations (22) et (23).

Pour $x = 0$, cette valeur se réduit à la constante, et puisque pour $x = a$, $y = 0$, $\mathrm{F}\Gamma y\big)$ et ses dérivées se réduisent aux coefficients de $\mathrm{F}(y)$, l'intégrale définie

$$\int_0^a \mathrm{F}\,\Gamma y\big)\, f\,\Gamma x\big)\,dx$$

a donc pour valeur

$$\Gamma a F(a)\Big)\, B_p + \Gamma a^2 f(a)\Big)\, B_{p-1} + \ldots + \Gamma a^p f(a)\Big)\, B_1 + \Gamma a^{p+1} f(a)\Big)\, B_0$$

ou, comme les coefficients de $F(y)$ sont constants,

$$\Gamma a B_0 a^p f(a) + a B_1 a^{p-1} f(a) + \ldots + a B_{p-1}\, a f(a) + a B_p f(a)\Big),$$

et l'on est conduit ainsi à l'égalité

$$(24) \qquad \int_0^a F\Gamma y\Big)\, f\Gamma x\Big)\, dx = \Gamma a F(a) f(a)\Big).$$

20. Lorsque les coefficients $A_0(x)$, $A_1(x)$,..., $A_p(x)$ sont des constantes, que je désignerai par A_0, A_1,..., A_p, l'équation (X) a la forme suivante

$$(25) \qquad \frac{d^{p+1} y}{dx^{p+1}} = A(x) + A_0 y + A_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + A_p \frac{d^p y}{dx^p};$$

et si l'on pose

$$z - t = u, \quad x - z = v, \quad x - t = v',$$

puis

$$P(u) = A_0 u^p + A_1 u^{p-1} + A_2 u^{p-2} + \ldots + A_{p-1} u + A_p,$$

l'équation (D) s'écrira

$$f(z, t) = P\Gamma u\Big),$$

et l'on aura d'abord, conformément à la première des équations (E),

$$f_0(x, z) = P\Gamma v\Big).$$

La seconde des équations (E) peut évidemment s'écrire

$$f_1(x, z) = \left[\int_t^x f_0(x, z) f(z, t)\, dz\right]_{t=z};$$

mais on a, en faisant usage de l'équation (24),

$$\int_t^x f_0(x, z) f(z, t)\, dz = \int_0^{v'} \mathrm{P}\Gamma v\big)\, \mathrm{P}\Gamma u\big)\, du = \Gamma v' \mathrm{P}(v')^2\big),$$

et comme, par le changement de t en z, v' se change en v,

$$f_1(x, z) = \Gamma v \mathrm{P}(v)^2\big).$$

Pareillement, la troisième des équations (E) étant mise sous la forme

$$f_2(x, z) = \left[\int_t^x f_1(x, z) f(z, t)\, dz\right]_{t=z},$$

on pourra remplacer la quantité placée entre les crochets par $\Gamma v'^2 \mathrm{P}(v')^3$, et le changement de t en z conduisant à celui de v' en v, on aura

$$f_2(x, z) = \Gamma v^2 \mathrm{P}(v)^3\big].$$

L'analogie conduit donc à poser, quel que soit q,

$$f_q(x, z) = \Gamma v^q \mathrm{P}(v)^{q+1}\big],$$

et la démonstration rigoureuse de cette formule ne présente aucune difficulté.

En portant ces valeurs de $f_0(x, z)$, $f_1(x, z)$, $f_2(x_1, z)$, etc., dans l'équation (G), elle devient

$$\varphi(x, z) = \Gamma \mathrm{P}(v) + v\mathrm{P}(v)^2 + v^2 \mathrm{P}(v)^3 + \ldots\big]. \tag{26}$$

21. La fonction $\varphi(x, z)$ est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de v; on trouvera le terme général de cette série en calculant le terme en v^q de la progression géométrique

$$\mathrm{P}(v) + v\mathrm{P}(v)^2 + v^2\mathrm{P}(v)^3 + \ldots, \tag{27}$$

et en le divisant par le produit $1.2.3\ldots q$.

Or cette progression peut s'écrire, en remplaçant ses $q+1$ premiers termes par leur somme connue,

$$\frac{P(v)}{1-vP(v)} - \frac{v^{q+1}P(v)^{q+2}}{1-vP(v)} + v^{q+1}P(v)^{q+2} + \ldots$$

ou bien encore

$$Q(v) + \frac{v^{q+1}[R(v) - P(v)^{q+2}]}{1-vP(v)} + v^{q+1}P(v)^{q+2} + \ldots,$$

en désignant par $Q(v)$ le quotient de la première division ordonné suivant les puissances croissantes de v et terminé au terme en v^q, et par $v^{q+1}R(v)$ le reste de cette division.

L'expression précédente représente une somme de quantités entières, la division qui y est indiquée se fait donc exactement, et il est manifeste que les exposants de v surpassent q, tant dans le quotient de cette division que dans les développements des quantités

$$v^{q+1}P(v)^{q+2}, \ldots,$$

qui suivent ce quotient.

$Q(v)$ est donc l'ensemble des $q+1$ premiers termes de la progression précédente développée suivant les puissances ascendantes de v.

Ainsi, pour développer $\varphi(x, z)$ en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $x-z$ ou de v, on fera la division

$$\frac{P(v)}{1-vP(v)},$$

en ordonnant le quotient suivant les puissances croissantes de v, puis on divisera chaque terme de ce quotient par le produit des nombres entiers qui ne surpassent pas son degré.

22. La fonction $\varphi(x, z)$ peut être mise sous forme finie.

La fraction rationnelle

$$\frac{P(v)}{1-vP(v)}$$

est décomposable en fraction simple. Si $\frac{1}{b}$ est l'une des racines de l'équation

$$(28)\qquad 1 - \nu P(\nu) = 0,$$

on sait que, dans le cas où cette racine est simple, elle ne donne naissance qu'à une seule fraction de la forme

$$\frac{B}{\nu - \frac{1}{b}} = \frac{-bB}{1 - \nu b},$$

où B désigne une constante que l'on sait calculer, et dont le développement, suivant les puissances croissantes de ν, a pour terme général

$$-bB(b\nu)^q.$$

Le développement de $\varphi(x, z)$ en série convergente comprend donc une série partielle ayant pour terme général

$$-bB\frac{(b\nu)^q}{1.2\ldots q},$$

et dont la somme est

$$-bBe^{b\nu}.$$

Dans le cas où $\frac{1}{b}$ est une racine multiple de l'équation (28), elle donne naissance, si β est son degré de multiplicité, à β fractions simples de la forme

$$\frac{B_i}{\left(\nu - \frac{1}{b}\right)^i} = (-b)^i B_i(1 - b\nu)^{-i},$$

i désignant tour à tour les entiers $1, 2, 3, \ldots, \beta$, et B_i une constante correspondante.

Le développement, suivant les puissances croissantes de ν, de chacune de ces fractions a pour terme général

$$(-b)^i B_i \frac{i(i+1)\ldots(i+q-1)}{1.2\ldots q} b^q \nu^q$$

ou

$$(-b)^i B_i \frac{(q+1)(q+2)\ldots(q+i-1)}{1.2\ldots(i-1)} b^q \nu^q,$$

car

$$\frac{i(i+1)\ldots(i+q-1)}{1.2\ldots q}=\frac{1.2.3\ldots(q+i-1)}{1.2\ldots q.1.2\ldots(i-1)}=\frac{(q+1)\ldots(q+i-1)}{1.2\ldots(i-1)};$$

par conséquent, en posant, pour abréger,

$$G(q)=-bB_1+b^2B_2\frac{q+1}{1}-b^3B_3\frac{(q+1)(q+2)}{1.2}+\ldots$$
$$+(-b)^\beta B_\beta\frac{(q+1)\ldots(q+\beta-1)}{1.2\ldots(\beta-1)},$$

$G(q)$ sera le coefficient de $b^q v^q$, dans la somme des développements, suivant les puissances croissantes de v, de toutes les fractions auxquelles la racine $\frac{1}{b}$ donne naissance.

Le développement de $\varphi(x, z)$ en série convergente comprend donc encore une série partielle correspondante à la racine multiple $\frac{1}{b}$, et ayant pour terme général

$$G(q)\frac{b^q v^q}{1.2\ldots q}.$$

Pour montrer que la somme de cette série partielle a une expression finie, je vais transformer $G(q)$ en posant

$$(29)\quad M_0+M_1q+M_2q(q-1)+\ldots+M_{\beta-1}q(q-1)\ldots(q-\beta+2)=G(q),$$

et je déterminerai les coefficients M_0, M_1,..., au moyen des équations

$$M_0=G(0),$$
$$M_0+M_1=G(1),$$
$$M_0+2M_1+1.2M_2=G(2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$M_0+(\beta-1)M_1+(\beta-2)(\beta-1)M_2+\ldots+1.2\ldots(\beta-1)M_{\beta-1}=G(\beta-1).$$

Leur forme montre qu'elles fourniront, pour les coefficients cherchés, un système unique de valeurs finies, et, de plus, ces valeurs portées dans l'équation (29) la réduiront à une identité, puisqu'elle est du degré $\beta - 1$, et qu'alors elle sera satisfaite par β valeurs de q, savoir : $0, 1, 2, \ldots, \beta - 1$.

Le terme général de la série correspondante à $\frac{1}{b}$, dans le développement de $\varphi(x, z)$, peut donc être mis sous la forme suivante

$$\begin{gathered}M_{\beta-1}(bv)^{\beta-1}\frac{(bv)^{q-\beta+1}}{1.2\ldots(q-\beta+1)} + M_{\beta-2}(bv)^{\beta-2}\frac{(bv)^{q-\beta+2}}{1.2\ldots(q-\beta+2)} + \ldots \\ + M_2(bv)^2\frac{(bv)^{q-2}}{1.2\ldots(q-2)} + M_1 bv\frac{(bv)^{q-1}}{1.2\ldots(q-1)} + M_0\frac{(bv)^q}{1.2\ldots q};\end{gathered}$$

et l'on aurait cette série partielle en donnant à q les valeurs $0, 1, 2, \ldots$, puis en ajoutant les résultats.

Si l'on conçoit qu'on fasse cette addition, en groupant tous les termes contenant une même valeur de $\frac{(bv)^q}{1.2\ldots q}$, on aura, en posant

$$K_b = M_0 + M_1(bv) + M_2(bv)^2 + \ldots + M_{\beta-1}(\beta v)^{\beta-1},$$

un résultat de la forme

$$K_b\left[1 + \frac{bv}{1} + \frac{(bv)^2}{1.2} + \ldots\right].$$

La série correspondante à la racine $\frac{1}{b}$ a donc pour somme

$$K_b e^{bv}.$$

En conséquence, si $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{l}$, sont les diverses racines de l'équation (28), et $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$, leurs degrés respectifs de multiplicité, la valeur de $\varphi(x, z)$ sera donnée par la formule

$$\varphi(x, z) = K_b e^{bv} + K_c e^{cv} + \ldots + K_l e^{lv},$$

où $K_b, K_c, \ldots, K_l$ désignent des polynômes connus dont les degrés sont $\beta - 1, \gamma - 1, \ldots, \lambda - 1$.

On remarquera que $b, c, \ldots, l$, dont les inverses sont les racines de l'équation (28), sont elles-mêmes les racines de l'équation

$$r^{p+1} = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \ldots + A_p r^p,$$

obtenue en négligeant le terme $A(x)$ de l'équation proposée (25), et en y remplaçant $\frac{d^k y}{dx^k}$ par r^k.

23. L'équation (H) peut s'écrire, dans le cas où (25) est l'équation différentielle proposée,

$$\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = F(x) - A(x) + \int_{x_0}^{x} [F(z) - A(z)] (K_b e^{bv} + K_c e^{cv} + \ldots + K_l e^{lv}) dz$$
$$+ A(x) + \int_{x_0}^{x} A(z) (K_b e^{bv} + K_c e^{cv} + \ldots + K_l e^{lv}) dz;$$

puisque $F(z) - A(z)$ est un polynôme entier, on saura toujours trouver les intégrales de la première ligne, et les résultats pourront être intégrés $p+1$ fois; quant aux intégrales de la seconde ligne, en général on ne saura pas les trouver; mais, dans tous les cas, la résolution de l'équation (25) est ramenée aux quadratures, et je pourrais m'arrêter ici.

24. Cependant je vais encore montrer comme la notation du numéro **19** facilite la résolution de l'équation (25) dans le cas où l'on a $A(x) = 0$.

Je pose

$$u_0 = z - x_0, \quad v_0 = x - x_0,$$

et comme $F(z)$ est, dans le cas actuel, un polynôme entier en $z - x_0$, on trouvera aisément un autre polynôme $F_1(u_0)$, tel que l'on ait

$$F(z) = F_1(u_0) \quad \text{et} \quad F(x) = F_1(v_0).$$

En faisant usage de la valeur (26) de $\varphi(x, z)$, l'équation (H) deviendra

$$\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = F_1(v_0) + \int_0^{v_0} F_1(u_0) \left[P(v) + vP(v)^2 + v^2 P(v)^3 + \ldots\right] du_0.$$

Puisqu'on a $v = x - z$ et $u_0 = z - x_0$ la formule (24) est applicable à l'intégrale précédente, et elle donne

$$\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = \mathrm{F}_1 \Gamma v_0) + \Gamma v_0 \mathrm{F}_1(v_0)\left[\mathrm{P}(v_0) + v_0 \mathrm{P}(v_0)^2 + v_0^2 \mathrm{P}(v_0)^3 + \ldots\right]\Big].$$

Pour trouver la valeur de y, il faudrait intégrer $(p+1)$ fois ce résultat par rapport à x, et chaque fois de x_0 à x; mais comme il revient au même de l'intégrer $p+1$ fois par rapport à v_0, et chaque fois de o à v_0, la formule (22) peut être employée et elle conduit à

$$y = \theta(v_0) + \Gamma v_0^{p+1} \mathrm{F}_1(v_0)\left[1 + v_0 \mathrm{P}(v_0) + v_0^2 \mathrm{P}(v_0)^2 + \ldots\right]\Big].$$

Des raisonnements et des calculs analogues à ceux qui ont été faits à l'occasion de la fonction $\varphi(x, z)$ montreraient d'abord que y peut être développée en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de v_0, puis que y peut être mise sous forme finie, et l'on trouverait par cette voie la valeur bien connue de y.