JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 161-174.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__161_0>

SUR LA FORME

$x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande une expression simple du nombre des représentations d'un entier n quelconque par la forme à six variables

$$x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2,$$

ou, ce qui revient au même, du nombre

$$N(n=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2)$$

des solutions de l'équation

$$n=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2,$$

où x, y, z, t, u, v sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Nous poserons

$$n=2^\alpha m,$$

m désignant un entier impair, et l'exposant α pouvant se réduire à zéro. La valeur de

$$N(2^\alpha m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2)$$

dépendra naturellement de l'exposant α; elle dépend aussi de la valeur de m (mod. 8). Mais elle dépend surtout d'une fonction numérique de m, proportionnellement à laquelle

$$N(2^\alpha m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2)$$

varie quand on considère la suite des entiers $2^{\alpha} m$ qui répondent à une même valeur donnée de α et de m (mod. 8). Nous dirons donc d'abord quelques mots de cette fonction numérique importante.

2. Décomposons l'entier m, de toutes les manières possibles, en un produit de deux facteurs conjugués d, δ, en sorte que

$$m = d\delta.$$

La fonction numérique dont nous parlons s'exprime par la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}+\frac{\delta^2-1}{8}} d^2.$$

En introduisant un symbole connu de Legendre, avec la signification plus étendue que lui attribue Jacobi, on peut encore l'écrire

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2.$$

On a

$$\left(\frac{-2}{\delta}\right) = \left(\frac{-2}{d}\right)$$

quand m est de l'une des deux formes

$$8\mu + 1, \quad 8\mu + 3;$$

on a donc alors

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2 = \sum \left(\frac{-2}{d}\right) d^2.$$

D'ailleurs

$$\left(\frac{-2}{d}\right) = 1$$

quand d est $\equiv 1$ ou 3 (mod. 8); tandis que

$$\left(\frac{-2}{d}\right) = -1$$

quand d est $\equiv 5$ ou 7 (mod. 8). Donc, quand il s'agit d'un entier m

de l'une des deux formes

$$8\mu + 1, \quad 8\mu + 3,$$

la fonction

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2$$

représente l'excès de la somme des carrés des diviseurs de m qui sont $\equiv 1$ ou $3 \pmod{8}$ sur la somme des carrés des diviseurs de m qui sont au contraire $\equiv 5$ ou $7 \pmod{8}$.

L'inverse a lieu quand m est de l'une des deux formes

$$8\mu + 5, \quad 8\mu + 7.$$

Dans ce cas

$$\left(\frac{-2}{\delta}\right) = -\left(\frac{-2}{d}\right),$$

et par suite

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2 = -\sum \left(\frac{-2}{d}\right) d^2.$$

Quand il s'agit d'un entier m de l'une des deux formes

$$8\mu + 5, \quad 8\mu + 7,$$

la fonction

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2$$

représente donc l'excès de la somme des carrés des diviseurs de m qui sont $\equiv 5$ ou $7 \pmod{8}$ sur la somme des carrés des diviseurs de m qui sont au contraire $\equiv 1$ ou $3 \pmod{8}$.

Pour $m = 1, 3, 5, 7, 9, 11$, etc., les valeurs respectives de la fonction

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2$$

sont

$$1, \ 10, \ 24, \ 48, \ 91, \ 122, \text{ etc.}$$

La fonction

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2$$

peut aussi s'exprimer par un produit. Soit

$$m = a^\lambda b^\rho \ldots,$$

a, b, etc., désignant les facteurs premiers de m. Le produit dont il s'agit sera celui des quantités suivantes :

$$a^{2\lambda} + \left(\frac{-2}{a}\right) a^{2\lambda-2} + a^{2\lambda-4} + \left(\frac{-2}{a}\right) a^{2\lambda-6} + \ldots,$$
$$b^{2\rho} + \left(\frac{-2}{b}\right) b^{2\rho-2} + b^{2\rho-4} + \left(\frac{-2}{b}\right) b^{2\rho-6} + \ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On pourra donc, suivant une notation connue, le représenter par

$$\prod \left[a^{2\lambda} + \left(\frac{-2}{a}\right) a^{2\lambda-2} + a^{2\lambda-4} + \left(\frac{-2}{a}\right) a^{2\lambda-6} + \ldots\right].$$

Par cette expression en produit, on voit que l'on a essentiellement

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2 > 0.$$

Au contraire la fonction

$$\sum \left(\frac{-2}{d}\right) d^2,$$

numériquement égale à la nôtre, prend des valeurs tantôt positives, tantôt négatives.

3. La valeur générale de

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2\right)$$

s'obtient en multipliant la fonction numérique de m dont nous venons de parler, savoir

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2,$$

ou

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}+\frac{\delta^2-1}{8}} d^2,$$

par le facteur suivant

$$\frac{2}{3}\left[4^{\alpha+2} - \left(\frac{-2}{m}\right)\right],$$

qui dépend de l'exposant α et de la valeur de m (mod. 8).

Cette équation si simple

$$\mathrm{N}(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{2}{3}\left[4^{\alpha+2} - \left(\frac{-2}{m}\right)\right] \sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2,$$

j'ai eu, je l'avoue, quelque peine à l'établir dans toute sa généralité. Je l'ai d'abord démontrée pour le cas de m égal à $8\mu + 5$ ou $8\mu + 7$; mais le cas de m égal à $8\mu + 1$ ou $8\mu + 3$ échappait à mes formules. Enfin j'ai réussi à trouver une méthode propre à tous les cas. Je suis donc certain maintenant de l'exactitude absolue de l'équation que je viens de poser.

4. Considérons d'abord un nombre impair m, et faisons $\alpha = 0$. Notre formule donne

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{2}{3}\left[16 - \left(\frac{-2}{m}\right)\right] \sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 10 \sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2$$

quand m est de l'une des deux formes

$$8\mu + 1, \quad 8\mu + 3,$$

mais

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{34}{3} \sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2$$

quand m est de l'une des deux formes

$$8\mu + 5, \quad 8\mu + 7.$$

Ainsi on a

$$N(1 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 10,$$

ce qui s'accorde avec les équations

$$\begin{aligned}
1 &= (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2,\\
1 &= 0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2,\\
1 &= 0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2,\\
1 &= 0^2 + 0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 2.0^2,\\
1 &= 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2,
\end{aligned}$$

qui donnent pour l'entier 1 dix représentations par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2.$$

On a ensuite

$$N(3 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 100;$$

or cela est confirmé par les identités

$$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2$$

et

$$3 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.1^2,$$

où l'on devra marquer du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls, puis effectuer les permutations convenables. La première identité fournira de cette manière quatre-vingts représentations de l'entier 3 et la seconde en fournira vingt.

L'équation

$$N(5 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{34}{3}\cdot 24 = 272$$

est aisée à vérifier au moyen des identités

$$\begin{aligned}
5 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.0^2,\\
5 &= 1^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2,\\
5 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2.1^2;
\end{aligned}$$

la première fournit trente-deux représentations de l'entier 5, la seconde en fournit quatre-vingts, le troisième cent soixante. Or

$$32 + 80 + 160 = 272.$$

Enfin on a

$$\mathrm{N}(7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 544.$$

Pour vérifier cette valeur, on se servira des identités

$$7 = 0^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.0^2,$$
$$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.1^2,$$
$$7 = 1^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.1^2.$$

En y affectant du double signe ± 1 les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en y opérant les permutations convenables, on tirera de la première de ces identités trois cent vingt représentations du nombre 7, la seconde en fournira soixante-quatre, la troisième cent soixante; or

$$320 + 64 + 160 = 544.$$

5. Pour les entiers impairement pairs $2m$, on a

$$\mathrm{N}(2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{2}{3}\left[64 - \left(\frac{-2}{m}\right)\right] \sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{N}(2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 42 \sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2$$

quand m est égal à $8\mu + 1$ ou $8\mu + 3$, mais

$$\mathrm{N}(2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{130}{3} \sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2$$

quand m s'exprime par $8\mu + 5$ ou $8\mu + 7$.

Ainsi

$$\mathrm{N}(2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 42;$$

or, au moyen des deux identités

$$2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2$$

et

$$2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.1^2,$$

on obtient en effet quarante-deux représentations de l'entier 2, la première identité fournissant quarante représentations et la seconde en fournissant deux.

On a ensuite

$$N(6 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 42.10 = 420.$$

Or les identités

$$6 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2,$$
$$6 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 2.1^2,$$
$$6 = 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.1^2$$

fournissent effectivement quatre cent vingt représentations de l'entier 6; la première en donne deux cent quarante, la seconde cent soixante, la troisième vingt.

L'équation

$$N(10 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{130}{3}\cdot 24 = 1040$$

se vérifie semblablement au moyen des identités

$$10 = 1^2 + 3^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2,$$
$$10 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 + 2.0^2,$$
$$10 = 2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.1^2,$$
$$10 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.1^2,$$
$$10 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.2^2;$$

les nombres de représentations qu'elles fournissent respectivement sont quatre-vingts, quatre cent quatre-vingts, quatre-vingts, trois cent vingt, quatre-vingts; or

$$80 + 480 + 80 + 320 + 80 = 1040.$$

Enfin on a, d'après notre formule,

$$N(14 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{130}{3}\cdot 48 = 2080;$$

et les identités

$$14 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2,$$
$$14 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 2.0^2,$$
$$14 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 2.1^2,$$
$$14 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 2.1^2,$$
$$14 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2.2^2$$

montrent que ce résultat est exact. Elles fournissent des représentations de l'entier 14, dont le nombre est respectivement, de la première identité à la dernière,

$$480,\ 320,\ 640,\ 160,\ 480;$$

le total fait précisément 2080.

6. Passant aux entiers pairement pairs, nous nous bornerons à appliquer la formule

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{2}{3}\left[4^{\alpha+2} - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2$$

aux deux plus petits multiples de 4, savoir 4 et 8.

D'abord nous trouvons

$$N(4 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 170.$$

Or ce résultat est confirmé par les identités

$$4 = 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2,$$
$$4 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 2.0^2,$$
$$4 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.1^2,$$

dont la première fournit dix représentations du nombre 4, tandis que chacune des deux autres en fournit quatre-vingts.

Pour le nombre 8, on a

$$N(8 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 682.$$

Les identités à employer cette fois sont

$$\begin{aligned} 8 &= 2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2, \\ 8 &= 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.0^2, \\ 8 &= 2^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2.1^2, \\ 8 &= 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.2^2. \end{aligned}$$

Elles fournissent des représentations de l'entier 8, dont le nombre compté de la première identité à la dernière est respectivement

$$40, \ 160, \ 480, \ 2;$$

or on a

$$40 + 160 + 480 + 2 = 682.$$

La vérification cherchée a donc lieu.

7. Nous avons donné l'expression générale du nombre total

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2)$$

des solutions, tant propres qu'impropres, de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2.$$

Mais on peut demander séparément celle du nombre

$$M(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2)$$

des solutions propres, pour lesquelles les indéterminées x, y, z, t, u, v ne sont pas toutes divisibles par un même facteur > 1.

Pour l'obtenir, il faudra substituer à la somme

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2,$$

ou au produit qui peut remplacer cette somme, le produit suivant

$$\prod\left[a^{2\lambda} + \left(\frac{-2}{a}\right) a^{2\lambda-2}\right],$$

qui se rapporte aux facteurs premiers a, b,..., de l'entier m mis sous la forme

$$m = a^{\lambda} b^{\rho} \ldots;$$

pour en déduire la valeur de

$$\mathrm{M}\,(2^{\alpha} m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2),$$

il faudra multiplier ce produit par un facteur dépendant de α et de la valeur de m (mod. 8), dont nous allons donner l'expression suivant les cas divers qui peuvent se présenter.

Dans le cas d'un entier impair, ou de $\alpha = 0$, ce facteur est

$$\frac{2}{3}\left[16 - \left(\frac{-2}{m}\right)\right];$$

pour les entiers impairement pairs, ou pour $\alpha = 1$, il devient

$$\frac{2}{3}\left[64 - \left(\frac{-2}{m}\right)\right];$$

enfin, pour $\alpha > 1$, il est égal à

$$5.2^{2\alpha+1}.$$

Ainsi, pour l'entier 4, il n'y a que cent soixante solutions propres; dix solutions impropres complètent le nombre total cent soixante-dix, obtenu plus haut : ce sont celles qui répondent à l'identité

$$4 = 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2.$$

8. En nous occupant du nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2,$$

nous avons admis jusqu'ici que les entiers x, y, z, t, u, v peuvent être indifféremment pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs. On peut aussi désirer de savoir quel est le nombre

$$\mathcal{N}(n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2)$$

des solutions de cette même équation quand on exige que x, y, z, t, u, v soient des entiers impairs et positifs, d'ailleurs quelconques. Il est bien clair que ce nombre est nul quand l'entier donné n n'est pas de la forme $8\mu + 7$. Mais quelle est la valeur de

$$\mathcal{N}(8\mu + 7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2)?$$

Pour répondre à cette question, il faut décomposer $8\mu + 7$ de toutes les manières possibles en un produit $d\delta$ de deux facteurs conjugués, puis prendre la quarante-huitième partie de la somme

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2.$$

On aura ainsi le nombre demandé. En d'autres termes,

$$\mathcal{N}(8\mu + 7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{1}{48} \sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2.$$

Par exemple, on a

$$\mathcal{N}(7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 1;$$

ce qui est confirmé par l'équation

$$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.1^2.$$

On a ensuite

$$\mathcal{N}(15 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{240}{48} = 5;$$

et cela s'accorde avec l'identité

$$15 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.1^2,$$

où 3^2 peut occuper cinq places distinctes.

Enfin

$$\mathfrak{N}(23 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{528}{48} = 11,$$

résultat exact, comme on peut le voir au moyen des identités

$$23 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.3^2,$$
$$23 = 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.1^2;$$

la première fournit une représentation de l'entier 23, la seconde en fournit dix.

Si, tout en n'admettant pour x, y, z, t, u, v que des entiers impairs et positifs dans l'équation

$$8\mu + 7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2,$$

on excluait les systèmes x, y, z, t, u, v où les indéterminées possèdent un facteur commun > 1, le nombre des solutions pourrait devenir inférieur à

$$\frac{1}{48}\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2.$$

Il s'exprimerait alors par

$$\frac{1}{48}\prod\left[a^{2\lambda} + \left(\frac{-2}{a}\right)a^{2\lambda-2}\right],$$

le produit indiqué se rapportant aux facteurs premiers a, b, etc., de l'entier $8\mu + 7 = a^\lambda b^\rho \ldots$; je crois pouvoir me dispenser d'ajouter des exemples.

9. En terminant, j'indiquerai celle de mes *formules générales* qui m'a conduit, dans le cas d'un entier impair m (le seul difficile ici), à la valeur de

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2).$$

C'est la formule marquée (I) dans mon cinquième article, à la page 277 du cahier d'août 1858. En y faisant

$$f(x) = x \sin\left(\frac{x\pi}{4}\right),$$

on obtient une formule particulière qui mène au but quand on la discute convenablement, en s'appuyant sur ce que j'ai donné au sujet de la forme $x^2+y^2+z^2+2t^2$ dans un article inséré au cahier de juillet 1861 (p. 225).

Ayant ainsi prouvé que

$$\mathrm{N}(m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2)=\frac{1}{3}\left[16-\left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2,$$

on en conclut facilement, par des considérations arithmétiques très-simples, que

$$\mathrm{N}(2m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2)=\frac{2}{3}\left[64-\left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2,$$

et ensuite que

$$\mathrm{N}(4m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2)=\frac{2}{3}\left[256-\left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2.$$

On pourrait continuer et s'élever graduellement de $4m$ à $8m$, de $8m$ à $16m$, etc.; mais il vaut mieux tout achever en une seule fois. Désignons, en effet, par $\psi(\alpha)$ la fonction

$$\mathrm{N}(2^\alpha m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2),$$

où nous ne voulons pour le moment faire varier que α, et nous établirons sans peine l'égalité

$$\psi(\alpha+3)-\psi(\alpha+1)=4[\psi(\alpha+2)-\psi(\alpha)],$$

qui est exacte même pour $\alpha=0$. De là notre équation générale

$$\mathrm{N}(2^\alpha m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2)=\frac{2}{3}\left[4^{\alpha+2}-\left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2.$$

C'est aussi par des considérations arithmétiques fort simples que l'on déduit la valeur de

$$\mathfrak{N}(8\mu+7=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2),$$

relative au cas des indéterminées impaires et positives, de celle de

$$\mathrm{N}(8\mu+7=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2).$$

Quant à la recherche du nombre des solutions propres, elle n'offre aucune difficulté.