JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 13-16.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__13_0>

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n, on demande le nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2)$$

des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2,$$

ou, ce qui revient au même, des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2,$$

dans laquelle x, y, z, t sont des entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs.

Il nous sera bien facile de répondre à cette question si l'on regarde comme connu, d'après l'article qui précède, le nombre

$$N(2n)$$

des solutions de l'équation

$$2n = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2.$$

Je me suis assuré en effet, et il est d'ailleurs bien facile de voir que le nombre demandé

$$N(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2)$$

est égal à

$$\frac{1}{3}[2 + (-1)^n]\,N(2n),$$

c'est-à-dire est égal à

$$\frac{1}{3}\mathrm{N}(2n)$$

quand n est impair, mais égal à

$$\mathrm{N}(2n)$$

quand n est pair.

Si donc on pose, comme dans l'article précédent,

$$n = 2^\alpha 5^\beta m,$$

m étant impair et premier à 5, et si l'on forme la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$, on verra, en distinguant le cas de n pair du cas de n impair, que

$$\mathrm{N}(5^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2)$$

est égal à

$$\left[5^{\beta+1} - \left(\frac{m}{5}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d,$$

tandis que, s'il s'agit d'un entier pair, c'est-à-dire du cas de $\alpha > 0$,

$$\mathrm{N}(2^\alpha 5^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2)$$

s'exprime par

$$\frac{1}{3}\left[5^{\beta+1} - (-1)^\alpha \left(\frac{m}{5}\right)\right]\left[2^{\alpha+2} + (-1)^\alpha.5\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

On admet pour β la valeur zéro comme toute autre valeur. Ainsi

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2)$$

est égal à

$$\left[5 - \left(\frac{m}{5}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d;$$

et, sous la condition de $\alpha > 0$,

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2)$$

est égal à

$$\frac{1}{3}\left[5 - (-1)^\alpha \left(\frac{m}{5}\right)\right]\left[2^{\alpha+2} + (-1)^\alpha . 5\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

2. On peut désirer aussi d'avoir séparément le nombre

$$M(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2)$$

des solutions propres de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2.$$

Pour former ce nombre, représentons-le par

$$H(\alpha, \beta, m) \prod \left[a^\mu + \left(\frac{a}{5}\right) a^{\mu-1}\right],$$

l'entier donné n l'étant lui-même par

$$2^\alpha 5^\beta m,$$

où m est impair et premier à 5. Le produit

$$\prod \left[a^\mu + \left(\frac{a}{5}\right) a^{\mu-1}\right],$$

déjà employé dans l'article précédent, est relatif aux facteurs premiers de m, μ désignant l'exposant de chacun de ces facteurs a dans l'expression de m. Voici quelle sera, suivant les divers cas, la valeur du coefficient

$$H(\alpha, \beta, m).$$

Occupons-nous d'abord des nombres impairs, pour lesquels $\alpha = 0$. On a

$$H(0, 0, m) = 5 - \left(\frac{m}{5}\right)$$

et

$$H(0, 1, m) = 25 - \left(\frac{m}{5}\right);$$

mais, pour $\beta > 1$,

$$H(0, \beta, m) = 24.5^{\beta-1}.$$

Passons aux entiers impairement pairs, c'est-à-dire au cas de $\alpha = 1$. On a

$$H(1, 0, m) = 5 + \left(\frac{m}{5}\right)$$

et

$$H(1, 1, m) = 25 + \left(\frac{m}{5}\right);$$

mais, pour $\beta > 1$,

$$H(1, \beta, m) = 24.5^{\beta-1}.$$

Quand $\alpha = 2$, on a successivement

$$H(2, 0, m) = 6\left[5 - \left(\frac{m}{5}\right)\right],$$

puis

$$H(2, 1, m) = 6\left[25 - \left(\frac{m}{5}\right)\right],$$

et, pour $\beta > 1$,

$$H(2, \beta, m) = 144.5^{\beta-1}.$$

Soit enfin $\alpha > 2$. Je trouve alors

$$H(\alpha, 0, m) = 2^{\alpha}\left[5 - (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\right],$$

et

$$H(\alpha, 1, m) = 2^{\alpha}\left[25 - (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\right],$$

mais, pour $\beta > 1$,

$$H(\alpha, \beta, m) = 3.2^{\alpha+3}5^{\beta-1}.$$