JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Nouveau théorème concernant le quadruple d'un nombre premier de l'une ou de l'autre des deux formes $20\kappa + 3, 20\kappa + 7$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 135-136.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__135_0>

NOUVEAU THÉORÈME

CONCERNANT

LE QUADRUPLE D'UN NOMBRE PREMIER DE L'UNE OU DE L'AUTRE DES DEUX FORMES $20k+3$, $20k+7$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Voici au sujet du quadruple d'un nombre premier m, de l'une ou de l'autre des deux formes

$$20k+3,\quad 20k+7,$$

un théorème nouveau que l'on pourra joindre à ceux que nous avons donnés dans le cahier de mars 1863.

Théorème. — « Pour tout nombre premier m de l'une ou de l'autre » des deux formes $20k+3$, $20k+7$, on peut poser au moins une » fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$4m = 5x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

» x, y étant des entiers impairs (positifs) et p un nombre premier qui » ne divise pas y. »

On admet pour l la valeur zéro. Quant au nombre premier p, nous ne lui imposons à priori aucune condition; mais, d'après l'équation même que je viens d'écrire, il doit être à la fois $\equiv 7 \pmod{8}$ et non résidu quadratique de 5. Il ne pourra donc appartenir qu'à l'une des deux formes $40\mu+7$, $40\mu+23$.

Les plus petits nombres premiers fournis par les deux expressions

$$20k+3,\quad 20k+7$$

sont

$$3,\ 7,\ 23,\ 43,\ 47.$$

Voyons comment notre théorème se vérifie pour eux.

Soit d'abord $m = 3$, d'où $4m = 12$. On a l'équation canonique

$$12 = 5.1^2 + 7.1^2.$$

Pour $m = 7$, c'est-à-dire pour $4m = 28$, on en a une également :

$$28 = 5.1^2 + 23.1^2.$$

Même résultat pour $m = 23$, d'où $4m = 92$. L'équation canonique qu'on obtient alors est

$$92 = 5.3^2 + 47.1^2.$$

Pour $m = 43$, d'où $4m = 172$, on a trois équations canoniques :

$$\begin{aligned} 172 &= 5.1^2 + 167.1^2, \\ 172 &= 5.3^2 + 127.1^2, \\ 172 &= 5.5^2 + 47.1^2. \end{aligned}$$

Mais pour $m = 47$, d'où $4m = 188$, on n'en a plus qu'une :

$$188 = 5.5^2 + 7.3^2.$$

Le nombre des équations canoniques étant toujours impair, notre théorème est vérifié.