JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉDOUARD ROCHE

Sur une généralisation de la formule de Taylor

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 129-134.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__129_0>

SUR UNE

GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE DE TAYLOR;

PAR M. ÉDOUARD ROCHE.

1. La formule de Taylor peut être considérée comme un cas particulier de la formule suivante, que je vais établir,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)-\ldots-\dfrac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)-h\varphi'(a)-\ldots-\dfrac{h^q}{1.2\ldots q}\varphi^q(a)} \\ &\qquad = \frac{1.2\ldots q}{1.2\ldots n}(h-\theta h)^{n-q}\frac{f^{n+1}(a+\theta h)}{\varphi^{q+1}(a+\theta h)}, \end{aligned} \right.$$

où n et q sont entiers et positifs, et θ un nombre inconnu compris entre o et 1.

Désignons par S le premier membre; c'est une fonction de a, h, n, q qu'il faut déterminer par la condition

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &0 = f(a+h)-f(a)-hf'(a)-\ldots-\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(a) \\ &\qquad -\mathrm{S}\left[\varphi(a+h)-\varphi(a)-h\varphi'(a)-\ldots-\frac{h^q}{1.2\ldots q}\varphi^q(a)\right]. \end{aligned} \right.$$

Soit la fonction auxiliaire

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(x) = f(a+h)-f(x)-(a+h-x)f'(x)-\ldots-\frac{(a+h-x)^n}{1.2\ldots n}f^n(x) \\ -\mathrm{S}\left[\varphi(a+h)-\varphi(x)-(a+h-x)\varphi'(x)-\ldots-\frac{(a+h-x)^q}{1.2\ldots q}\varphi^q(x)\right], \end{aligned}$$

dont la dérivée par rapport à la variable x est

$$(3)\quad \mathrm{F}'(x) = -\frac{(a+h-x)^n}{1.2\ldots n}f^{n+1}(x)+\mathrm{S}\frac{(a+h-x)^q}{1.2\ldots q}\varphi^{q+1}(x).$$

$F(x)$ et $F'(x)$ seront des fonctions continues entre a et $a+h$, si l'on admet qu'il en soit ainsi des fonctions

$$f(x),\ f'(x),\ldots,\ f^{n+1}(x),\qquad \varphi(x),\ \varphi'(x),\ldots,\ \varphi^{q+1}(x).$$

Il suit de là que $F(a+h)=0$, et aussi $F(a)=0$, en vertu de la condition (2). Donc $F'(x)$ doit s'annuler au moins une fois entre a et $a+h$, c'est-à-dire que $F'(a+\theta h)=0$ pour une certaine valeur de θ comprise entre 0 et 1. De là résulte, par l'équation (3),

$$0=-\frac{h^n(1-\theta)^n}{1.2\ldots n}f^{n+1}(a+\theta h)+S\frac{h^q(1-\theta)^q}{1.2\ldots q}\varphi^{q+1}(a+\theta h);$$

et enfin

$$S=\frac{1.2\ldots q}{1.2\ldots n}h^{n-q}(1-\theta)^{n-q}\frac{f^{n+1}(a+\theta h)}{\varphi^{q+1}(a+\theta h)}.$$

Telle est l'expression du rapport cherché, ce qui démontre la formule (1).

Le raisonnement serait en défaut si $f^{n+1}(x)$ et $\varphi^{q+1}(x)$ s'annulaient pour une même valeur de x comprise entre a et $a+h$: car alors l'équation (3) montre que, dans cet intervalle, la dérivée $F'(x)$ pourrait être nulle sans que S fût déterminé, c'est-à-dire sans qu'il fût nécessaire de donner à S la valeur précédente. Pour éviter cet inconvénient, sans ôter à la fonction $f(x)$ sa généralité, nous assujettirons la fonction $\varphi(x)$ à la condition que sa dérivée $\varphi^{q+1}(x)$ ne s'annule pas de a à $a+h$. Cette convention faite, la formule (1) sera toujours vraie, quand même $f^{n+1}(x)$ viendrait à s'annuler.

2. La formule (1), lorsqu'on suppose nuls à la fois les nombres n et q, se réduit au théorème de Cauchy sur le rapport des accroissements finis de deux fonctions,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}, \tag{4}$$

pourvu qu'on ait soin de remplacer par l'unité les produits $1.2\ldots n$, $1.2\ldots q$. A l'inverse, on peut de ce théorème remonter à notre formule générale. Il suffit pour cela d'appliquer l'équation (4) aux deux fonctions suivantes

$$f(a+h)-f(x)-(a+h-x)f'(x)-\ldots-\frac{(a+h-x)^n}{1.2\ldots n}f^n(x),$$

$$\varphi(a+h)-\varphi(x)-(a+h-x)\varphi'(x)-\ldots-\frac{(a+h-x)^q}{1.2\ldots q}\varphi^q(x),$$

$f(x)$ et $\varphi(x)$ satisfaisant aux diverses conditions dont nous avons parlé plus haut. On retrouve ainsi immédiatement la formule (1).

3. Voici une autre marche basée sur la démonstration de la formule de Taylor à l'aide de l'intégration par parties. On a

$$f(a+h)-f(a)=\int_0^h f'(a+h-x)\,dx.$$

Or l'intégrale indéfinie

$$\int f'(a+h-x)\,dx$$

se transforme en

$$xf'(a+h-x)+\frac{x^2}{1.2}f''(a+h-x)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^n(a+h-x)$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots n}\int x^n f^{n+1}(a+h-x)\,dx.$$

Prenons les intégrales entre les limites o et h, ce qui suppose la continuité des diverses fonctions dans cet intervalle; il vient

$$hf'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(a)$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^h x^n f^{n+1}(a+h-x)\,dx.$$

Le dernier terme est une forme particulière du reste de $f(a+h)$ développé jusqu'au terme en h^n, et l'on peut écrire

$$(5)\qquad f(a+h)-f(a)-hf'(a)-\ldots-\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(a)=\mathrm{R}_n,$$

et

$$(6) \qquad \mathrm{R}_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^h x^n f^{n+1}(a+h-x)\,dx.$$

Soit maintenant $\varphi(x)$ une fonction arbitraire de x, satisfaisant aux mêmes conditions de continuité, et de plus telle que $\varphi^{q+1}(x)$ ne s'annule pas de a à $a+h$. On a identiquement

$$(7) \quad \mathrm{R}_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^h x^{n-q}\frac{f^{n+1}(a+h-x)}{\varphi^{q+1}(a+h-x)}\cdot x^q\varphi^{q+1}(a+h-x)\,dx.$$

Considérons le premier facteur de l'intégrale. Nous le ferons sortir hors du signe, en lui attribuant une valeur moyenne entre les diverses valeurs qu'il prend quand x varie de o à h. Et comme, d'après les hypothèses, c'est une fonction continue, cette valeur moyenne répond à une valeur de x comprise entre o et h, que nous appellerons $h(1-\theta)$, θ étant lui-même compris entre o et 1. On a donc

$$(8) \quad \mathrm{R}_n = \frac{1}{1.2\ldots n}(h-\theta h)^{n-q}\frac{f^{n+1}(a+\theta h)}{\varphi^{q+1}(a+\theta h)}\int_0^h x^q\varphi^{q+1}(a+h-x)\,dx.$$

Mais si l'on développe la fonction φ par les formules (5) et (6), on a, en s'arrêtant au terme en h^q,

$$(9) \quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(a+h)-\varphi(a)-h\varphi'(a)-\frac{h^2}{1.2}\varphi''(a)-\ldots-\frac{h^q}{1.2\ldots q}\varphi^q(a) \\ &\qquad = \frac{1}{1.2\ldots q}\int_0^h x^q\varphi^{q+1}(a+h-x)\,dx.\end{aligned}\right.$$

Éliminant l'intégrale entre cette équation et la précédente,

$$(10) \quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{R}_n = \frac{1.2\ldots q}{1.2\ldots n}(h-\theta h)^{n-q}\frac{f^{n+1}(a+\theta h)}{\varphi^{q+1}(a+\theta h)} \\ &\qquad \times\left[\varphi(a+h)-\varphi(a)-h\varphi'(a)-\ldots-\frac{h^q}{1.2\ldots q}\varphi^q(a)\right].\end{aligned}\right.$$

On peut considérer cette formule comme donnant une expression générale du terme complémentaire de la série de Taylor. D'ailleurs, si l'on substitue R_n dans l'équation (5), on retrouve notre formule (1).

4. Nous avons admis que la fonction $\varphi^{q+1}(x)$ ne s'annulait pas de a à $a+h$, et par suite que $\varphi^{q+1}(a+h-x)$ ne changeait pas de signe de $x=0$ à $x=h$; alors tous les éléments $x^q\varphi^{q+1}(a+h-x)\,dx$ de l'intégrale (8) sont de même signe. Cela est nécessaire pour que, en multipliant chacun d'eux par le facteur constant

$$(h-\theta h)^{n-q}\frac{f^{n+1}(a+\theta h)}{\varphi^{q+1}(a+\theta h)},$$

on soit sûr d'obtenir un résultat équivalent à l'intégrale (7). Si cette condition n'était pas remplie, rien ne prouve que le facteur qu'on veut mettre en dehors du signe de l'intégration aurait une valeur intermédiaire entre la valeur minima et la valeur maxima qu'il acquiert de $x=0$ à $x=h$.

5. L'expression (10) de R_n contient les formes ordinaires du reste de la série de Taylor et peut en fournir une infinité d'autres. Car en prenant pour $\varphi(x)$ telle fonction qu'on voudra (satisfaisant aux conditions énoncées) et en donnant au nombre indéterminé q des valeurs particulières, on aura tout autant de formes du terme complémentaire.

Comme application, prenons d'abord

$$\varphi(x)=(x-a)^{p+1},$$

$p+1$ désignant un nombre positif; on aura

$$\varphi^q(x)=(p+1)p\ldots(p-q+2)(x-a)^{p-q+1};$$

d'où il résulte

$$\varphi(a+h)=h^{p+1}\quad\text{et}\quad\varphi^q(a)=0,$$

tant que q reste au-dessous du nombre positif $p+1$. De là

$$(11)\qquad R_n=\frac{1.2\ldots q}{1.2\ldots n}\,\frac{(1-\theta)^{n-q}}{\theta^{p-q}}\,\frac{h^{n+1}}{(p+1)\ldots(p-q+1)}f^{n+1}(a+\theta h).$$

Les deux nombres p et q sont ici indéterminés, mais q doit être entier et inférieur à $p+1$.

Faisons $q=0$ dans la formule (10), et en même temps

$$\varphi(x)=f^n(x), \quad \varphi'(x)=f^{n+1}(x).$$

Cela est permis, d'après une remarque précédente, pourvu que $f^{n+1}(x)$ ne s'annule pour aucune valeur de x comprise entre a et $a+h$. Par la substitution, $f^{n+1}(a+\theta h)$ disparaît, et l'on a

$$\text{(12)} \qquad R_n=\frac{h^n(1-\theta)^n}{1.2\ldots n}[f^n(a+h)-f^n(a)],$$

de sorte que le reste est alors moindre en valeur absolue que

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n}[f^n(a+h)-f^n(a)].$$

6. Enfin l'expression générale (10) se réduit, quand on y suppose nul le nombre indéterminé q, à

$$\text{(13)} \qquad R_n=\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{\varphi'(a+\theta h)}\,\frac{h^n(1-\theta)^n}{1.2\ldots n}f^{n+1}(a+\theta h);$$

c'est la formule de M. Schlömilch. Si l'on y détermine la fonction arbitraire par la condition

$$\varphi(x)=(a+h-x)^{p+1},$$

$p+1$ étant un nombre quelconque positif, on trouve

$$\text{(14)} \qquad R_n=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p}}{1.2\ldots n(p+1)}f^{n+1}(a+\theta h).$$

Cette expression du reste, que j'ai donnée dans ce journal (cahier de juillet 1858, p. 271), contient comme cas particuliers les deux formes usuelles. La forme de Lagrange s'obtient en y faisant $p=n$, et pour $p=0$ on retrouve celle de Cauchy.