JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 115-118.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__115_0>

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2$;

Par M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande une expression simple du nombre des représentations de n par la forme à six variables

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2,$$

c'est-à-dire du nombre

$$\mathrm{N}\,(n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2,$$

où x, y, z, t, u, v sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Comme les facteurs 2 et 3, quand ils entrent dans n, jouent un rôle à part, nous ferons

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m désignant un entier impair et premier à 3, après quoi nous introduirons la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$m = d\delta.$$

Nous distinguerons d'ailleurs les deux cas de

$$\alpha = 0$$

et de

$$\alpha > 0.$$

2. Soit d'abord $\alpha = 0$, en sorte qu'il s'agisse d'un entier impair $3^\beta m$. Je trouve pour

$$\mathrm{N}\,(3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 3v^2)$$

la valeur suivante

$$\left[9^{\beta+1} - \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

On peut supposer $\beta = 0$, et alors on voit que

$$\mathrm{N}\,(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2)$$

s'exprime par

$$\left[9 - \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

c'est-à-dire par

$$8 \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

quand

$$m = 6k + 1,$$

et par

$$10 \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

quand

$$m = 6k - 1.$$

Ainsi, par exemple, on a

$$\mathrm{N}\,(1 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2) = 8,$$

et cela s'accorde avec l'identité

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0.0 + 2.0^2,$$

dans laquelle on peut mettre $(\pm 1)^2$ à quatre places distinctes. Je me contenterai de ce seul exemple.

3. Passons aux entiers pairs exprimés par $2^\alpha 3^\beta m$, sous la condition de $\alpha > 0$. J'obtiens pour

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2),$$

sous cette condition de $\alpha > 0$, et quel que soit β, l'expression ci-après :

$$\frac{3}{5}\left[9^{\beta+1} - (-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{2\alpha+1} + (-1)^\alpha . 3\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

Pour $\beta = 0$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier pair non multiple de 3, la valeur de

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2)$$

est donc

$$\frac{3}{5}\left[9 - (-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{2\alpha+1} + (-1)^\alpha . 3\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

Le cas le plus simple est celui de $\alpha = 1$. On trouve le nombre

$$N(2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2)$$

égal à

$$3\left[9 + \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

c'est-à-dire égal à

$$30 \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

quand

$$m = 6k + 1,$$

et à

$$24 \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

quand

$$m = 6k - 1.$$

Ainsi, par exemple,

$$N(2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2) = 30,$$

ce qui s'accorde avec les identités

$$2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0.0 + 2.0^2,$$
$$2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0.0 + 2(\pm 1)^2,$$
$$2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)(\mp 1) + 2(\mp 1)^2,$$

et

$$2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0.0 + 2.0^2.$$

Cette dernière identité, où l'on doit affecter du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et opérer les permutations convenables, fournit vingt-quatre représentations de l'entier 2 par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2.$$

Les autres, dans la troisième desquelles les signes supérieurs et inférieurs se correspondent, en fournissent six. Or

$$6 + 24 = 30.$$

4. On peut désirer une expression de

$$\mathrm{N}\,(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2)$$

qui soit absolument générale, c'est-à-dire qui reste exacte même pour $\alpha = 0$. Celle que nous venons de communiquer (au n° **3**) ne jouit pas de cette propriété. Quand on y fait $\alpha = 0$, elle donne une valeur triple de la véritable. Pour remédier à cet inconvénient, il aurait suffi de la diviser par le facteur

$$2 - (-1)^{2^\alpha}$$

qui est égal à 1 pour $\alpha > 0$, mais égal à 3 pour $\alpha = 0$. Nous avons pensé qu'il valait mieux distinguer et traiter séparément le cas des entiers impairs et le cas des entiers pairs. Ceux qui voudront, au contraire, les réunir dans une même formule le feront, comme on voit, bien facilement.