JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Sur la forme $x^2+3\left(y^2+z^2+t^2+u^2+v^2\right)$**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 9 (1864), p. 105-114.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__105_0>

# SUR LA FORME
# $x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande une expression simple du nombre des représentations d'un entier donné $n$ par la forme à six variables

$$x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

c'est-à-dire du nombre

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

où $x$, $y$, $z$, $t$, $u$, $v$ sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Il sera facile de répondre à cette question, si l'on se souvient de ce que nous avons dit dans l'article précédent (dont nous conserverons ici toutes les notations) au sujet du nombre

$$\mathrm{N}(n)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2.$$

Mais d'abord observons que l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

est évidemment impossible quand $n$ est de la forme $3g + 2$, de manière que

$$N[3g + 2 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 0.$$

Il ne faut donc s'occuper que des entiers multiples de 3 et des entiers $\equiv 1 \pmod{3}$.

L'équation

$$3n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

exige que $x$ soit multiple de 3; et, en posant $x = 3x_1$, elle se change en celle-ci :

$$n = y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2 + 3x_1^2,$$

qui lui est parfaitement équivalente et dont le nombre

$$N(n)$$

de solutions a été déterminé. L'équation

$$N[3n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = N(n)$$

répond donc à la question actuelle, en tant qu'il s'agit d'un entier multiple de 3.

Le cas des entiers $\equiv 1 \pmod{3}$ offre plus de difficulté; j'ai pourtant réussi à le résoudre en prouvant que

$$N[3g + 1 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

vaut précisément le cinquième de

$$N(3g + 1 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2),$$

c'est-à-dire, d'après notre notation, en prouvant que

$$N[3g + 1 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = \frac{1}{5} N(3g + 1).$$

**2.** Les quelques lignes qui précèdent pourraient paraître suffisantes; mais il ne sera pas inutile, je crois, de donner explicitement les formules qui en résultent.

Posons

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

$m$ étant un entier impair, non divisible par 3. Si l'on a $\beta > 0$, la valeur de

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

sera, comme on vient de le voir, égale à celle de

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^{\beta-1} m).$$

En appliquant la formule (12) de l'article précédent, on obtiendra donc (dans le cas de $\beta > 0$) pour

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

l'expression suivante

$$\frac{1}{5}(-1)^{2^\alpha}\left[9^\beta + (-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[4^{\alpha+1} - (-1)^\alpha . 9\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

On admet pour $\alpha$ la valeur zéro comme toute autre valeur, et il importe peu que l'entier $2^\alpha 3^\beta m$ soit pair ou impair. Mais il est bien remarquable que cette expression reste exacte même quand $\beta = 0$, en sorte que la valeur de

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

est

$$\frac{1}{5}(-1)^{2^\alpha}\left[1 + (-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[4^{\alpha+1} - (-1)^\alpha . 9\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

En effet, quand $2^\alpha m$ est de la forme $3g + 2$, on a

$$(-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right) = \left(\frac{2^\alpha m}{3}\right) = -1,$$

d'où

$$1 + (-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right) = 0,$$

ce qui s'accorde bien avec l'équation

$$\mathrm{N}\,[3g + 2 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2) = 0;$$

et quand $2^\alpha m$ est de la forme $3g + 1$, on a

$$(-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right) = \left(\frac{2^\alpha m}{3}\right) = 1,$$

d'où

$$1 + (-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right) = 2,$$

ce qui conduit pour

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

à la valeur ci-après

$$\frac{2}{5}(-1)^{2^\alpha}\left[4^{\alpha+1} - (-1)^\alpha . 9\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d^2,$$

laquelle est exacte, car c'est précisément (dans les conditions admises) celle de

$$\frac{1}{5}\,\mathrm{N}\,(2^\alpha m).$$

Quelques exemples numériques suffiront, je pense. Notre méthode donne

$$\mathrm{N}\,[1 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 2,$$

ce qui est évident à priori; puis

$$\mathrm{N}\,[3 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 10,$$

ce qui s'accorde avec l'identité

$$3 = 0^2 + 3[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$

où l'on peut mettre $(\pm 1)^2$ à cinq places distinctes; ensuite

$$\mathrm{N}\,[4 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 22,$$

résultat dont on vérifiera l'exactitude au moyen de l'identité

$$4 = (\pm 2)^2 + 3(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2)$$

qui donne deux représentations de l'entier 4 par la forme qui nous occupe, et de l'identité

$$4 = 1^2 + 3(1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$

qui en fournira vingt, en y affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en y opérant les permutations convenables. Nous terminerons par

$$\mathrm{N}[6 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 40,$$

et, cette fois, c'est de l'identité

$$6 = 0^2 + 3(1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2)$$

qu'il faudra se servir.

**3.** Je ne m'arrêterai pas à chercher séparément le nombre des solutions propres de l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

non que cette recherche soit difficile : elle est seulement fastidieuse, à cause des cas divers qu'il faut distinguer ; je m'en réfère donc sur ce point à la méthode générale qui s'offre d'elle-même. Mais je veux dire quelques mots d'une autre question qui a de l'intérêt, et déterminer le nombre

$$\mathcal{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

des solutions que l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

conserve quand on n'admet pour valeurs de $x, y, z, t, u, v$ que des entiers impairs et positifs. Cela suppose évidemment $n$ multiple de 8, sans quoi il n'y aurait pas de telles solutions; il faut écarter aussi le cas de $n = 3g + 2$. Enfin je mets de côté le cas trop facile de $n$ multiple de 3. Je n'ai plus dès lors que deux suppositions à faire

$$n = 8.2^{2\gamma}(6k - 1)$$

et

$$n = 8.2^{2\gamma+1}(6k + 1),$$

la valeur $\gamma = 0$ étant admise comme toute autre valeur entière $> 0$.

Quand

$$n = 8.2^{2\gamma}(6k - 1),$$

je forme la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

relative aux diviseurs conjugués $d$, $\delta$ de l'entier

$$6k - 1 = d\delta,$$

et j'obtiens pour

$$\mathfrak{N}\left[8.2^{2\gamma}(6k - 1) = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

l'expression que voici

$$4^{2\gamma-1} \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

Ainsi, en prenant $\gamma = 0$, $k = 1$, on a

$$\mathfrak{N}[8.5 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 6,$$

ce qui est confirmé par les identités

$$40 = 5^2 + 3(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)$$

et

$$40 = 1^2 + 3(3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$

dans la seconde desquelles on peut mettre $3^2$ à cinq places distinctes.

En prenant $\gamma = 0$, $k = 2$, on trouve ensuite

$$\mathfrak{N}[8.11 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 30;$$

ce que l'on vérifie au moyen des identités

$$88 = 1^2 + 3(5^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$88 = 1^2 + 3(3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$88 = 5^2 + 3(3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$88 = 7^2 + 3(3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$

en y effectuant les permutations qu'elles comportent.

Soit enfin $\gamma = 1$, $k = 1$; il nous viendra

$$\mathfrak{N}[160 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 96;$$

et l'on s'assurera que cette valeur est exacte, au moyen des identités ci-après :

$$160 = 1^2 + 3(7^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$160 = 1^2 + 3(5^2 + 5^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$160 = 1^2 + 3(5^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2),$$
$$160 = 5^2 + 3(5^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$160 = 5^2 + 3(3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2),$$
$$160 = 7^2 + 3(5^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$160 = 7^2 + 3(3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2),$$
$$160 = 11^2 + 3(3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$

où l'on opérera, bien entendu, les permutations convenables.

Quand

$$n = 8.2^{2\gamma+1}(6k+1),$$

formez de même la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

relative aux diviseurs conjugués de l'entier

$$6k + 1 = d\delta.$$

La valeur de

$$\mathfrak{N}\left[8.2^{2\gamma+1}(6k+1) = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

sera

$$16^\gamma \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

Ainsi, par exemple,

$$\mathfrak{N}[16 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 1;$$

l'identité

$$16 = 1^2 + 3(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)$$

confirme ce fait.

L'équation

$$\mathfrak{N}[64 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 16,$$

que notre formule donne aussi, est confirmée à son tour par les identités

$$64 = 1^2 + 3(3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$64 = 5^2 + 3(3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$64 = 7^2 + 3(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$

dont les deux premières comportent des permutations.

On trouve encore

$$\mathfrak{N}[16.7 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 50;$$

et la vérification est facile au moyen des identités

$$112 = 1^2 + 3(5^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$112 = 1^2 + 3(3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2),$$
$$112 = 5^2 + 3(5^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$112 = 5^2 + 3(3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$112 = 7^2 + 3(3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$

où l'on effectuera les permutations convenables.

J'ajouterai que pour les représentations à indéterminées impaires dont nous venons de nous occuper, concernant la forme

$$x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

et les deux classes d'entiers

$$8.2^{2\gamma}(6k - 1), \quad 8.2^{2\gamma+1}(6k + 1),$$

la question du nombre des représentations propres est facile. Il suffit de remplacer la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

par le produit

$$\prod \left[a^{2\mu} + \left(\frac{a}{3}\right) a^{2\mu-2}\right]$$

relatif aux facteurs premiers de $6k - 1$ ou de $6k + 1$ mis sous la forme $a^{\mu} b^{\nu}\ldots$; les coefficients restent les mêmes.

**4.** La méthode que nous avons indiquée au n° **1** pour arriver à la valeur de

$$N[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

paraît assez simple : le lemme sur lequel elle repose est d'ailleurs aisé à démontrer. Peut-être est-il bon pourtant d'avertir que nous aurions pu suivre une autre route en rattachant l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

à ces deux-ci :

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2$$

et

$$3n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2,$$

dont les nombres de solutions

$$N(n), \quad N(3n)$$

sont connus. On a, en effet,

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = \frac{1}{9}[10\mathrm{N}(n) - \mathrm{N}(3n)].$$

Cette relation est vérifiée par la valeur donnée plus haut pour son premier membre. Mais elle est susceptible aussi d'une démonstration *à priori*, et en l'établissant ainsi on arrive directement à l'expression générale de

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)].$$

Si l'on voulait se borner aux valeurs impaires et positives de $x, y, z, t, u, v$, on trouverait de même

$$\mathfrak{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = \frac{1}{9}[10\,\mathfrak{N}(n) - \mathfrak{N}(3n)].$$