JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

O. SCHLÖMILCH

Sur la quadrature des surfaces du 2e ordre douées de centre

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 89-98.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__89_0>

SUR

LA QUADRATURE DES SURFACES DU 2e ORDRE DOUÉES DE CENTRE;

PAR O. SCHLÖMILCH,
Professeur à l'École Polytechnique de Dresde.

Nos notions sur la quadrature des surfaces du second ordre douées de centre se bornent encore au théorème établi par Legendre, que l'aire d'une portion d'une pareille surface terminée par quatre lignes de courbure peut être exprimée par des intégrales elliptiques. Mais, à l'exception du cas très-particulier où il s'agit de l'aire totale de l'ellipsoïde, cette expression est assez compliquée quand on y effectue toutes les réductions indiquées, circonstance qui est certainement la cause de ce qu'on n'ait encore trouvé dans la géométrie à trois dimensions aucun théorème analogue à celui de Fagnano [*]. D'après cela, il ne me semble pas superflu de montrer dans ce qui suit qu'on peut déterminer sur chacune des surfaces mentionnées une infinité de zones ou calottes dont les aires peuvent s'exprimer par des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce, et que, de plus, des zones et des calottes peuvent y être déterminées dont les aires ne diffèrent entre elles que par des quantités algébriques.

Que l'équation générale des trois surfaces du second ordre, douées de centre, soit

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

et que l'on ait pour les cas spéciaux

Ellipsoïde..................	$A = +\frac{1}{a^2}$,	$B = +\frac{1}{b^2}$,	$C = +\frac{1}{c^2}$,
Hyperboloïde à une nappe.....	$A = +\frac{1}{a^2}$,	$B = +\frac{1}{b^2}$,	$C = -\frac{1}{c^2}$,
Hyperboloïde à deux nappes...	$A = -\frac{1}{a^2}$,	$B = -\frac{1}{b^2}$,	$C = +\frac{1}{c^2}$.

[*] *Voyez* pourtant un article de M. Le Besgue *sur les arcs à différence rectifiable et les zones à différence planifiable* (cahier de septembre 1846, p. 331); *voyez* aussi une lettre du même auteur (p. 336). (J. L.)

Soit de plus, pour abréger,

$$(2)\qquad \alpha = \sqrt{1 - \frac{A}{C}}, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{B}{C}};$$

alors α et β désignent les excentricités des sections principales dans les plans de xz et de yz. Pour que α et β soient toujours réels et $\alpha > \beta$, il faut supposer dans l'ellipsoïde $a > b > c$, et dans les hyperboloïdes $a < b$. Qu'on imagine maintenant dans le plan de xy deux ellipses concentriques rapportées à leurs demi-axes respectifs a_0, b_0 et $a_1 > a_0$, $b_1 > b_0$. L'aire annulaire comprise entre ces deux ellipses peut être considérée comme la projection horizontale d'une zone d'une des surfaces en question. Soit Z l'aire de cette zone. On a alors

$$(3)\qquad \frac{1}{4} Z = \int\!\!\int \sqrt{\frac{1 - A\alpha^2 x^2 - B\beta^2 y^2}{1 - Ax^2 - By^2}}\, dx\, dy,$$

où les intégrations se rapportent à toutes les valeurs positives de x et y qui satisfont en même temps aux conditions

$$\left(\frac{x}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_0}\right)^2 \geqq 1, \quad \left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 \leqq 1.$$

En introduisant des coordonnées polaires au moyen des formules connues

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad dx\, dy = r\, d\theta\, dr,$$

et en posant, pour abréger,

$$P = A\cos^2\theta + B\sin^2\theta, \qquad Q = A\alpha^2\cos^2\theta + B\beta^2\sin^2\theta,$$

$$R_0 = \left(\frac{\cos\theta}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{b_0}\right)^2, \qquad R_1 = \left(\frac{\cos\theta}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{b_1}\right)^2,$$

la formule (3) se change en

$$Z = 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{R_1}}}^{\frac{1}{\sqrt{R_0}}} \sqrt{\frac{1 - Qr^2}{1 - Pr^2}}\, r\, d\theta\, dr.$$

La fonction qu'il s'agit d'intégrer par rapport à r devient rationnelle par la substitution de

$$\frac{1-Pr^2}{1-Qr^2} = u^2,$$

$$r^2 = \frac{1-u^2}{P-Qu^2}, \quad rdr = -\frac{P-Q}{(P-Qu^2)^2}\,du;$$

on obtient

$$Z = 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_{u_1}^{u_0} \frac{P-Q}{(P-Qu^2)^2}\,d\theta\,du, \tag{4}$$

les limites u_0 et u_1 étant

$$u_0 = \sqrt{\frac{R_0-P}{R_0-Q}}, \quad u_1 = \sqrt{\frac{R_1-P}{R_1-Q}}.$$

L'intégration par rapport à u pourrait s'effectuer sans peine, mais elle fournirait une expression assez compliquée renfermant ou des logarithmes ou des arcs de cercle. Si u_0 et u_1 étaient constants, on pourrait éluder cet inconvénient et simplifier considérablement le calcul en renversant l'ordre des intégrations, moyen qui ne réussit pas, tant que u_0 et u_1 sont fonctions de θ. Il faut donc opérer de manière à rendre constants u_0 et u_1. Or on a, d'après la signification de P, Q, R_0, R_1, α, β,

$$R_0 - P = \left(\frac{1}{a_0^2} - A\right)\cos^2\theta + \left(\frac{1}{b_0^2} - B\right)\sin^2\theta,$$

$$R_0 - Q = \left(\frac{1}{a_0^2} - A + \frac{A^2}{C}\right)\cos^2\theta + \left(\frac{1}{b_0^2} - B + \frac{B^2}{C}\right)\sin^2\theta;$$

la seconde de ces deux expressions devient divisible par la première, quand on a en même temps

$$A^2 = \left(\frac{1}{a_0^2} - A\right)H_0, \quad B^2 = \left(\frac{1}{b_0^2} - B\right)H_0,$$

H_0 désignant un facteur constant indéterminé. On peut remplir ces conditions en posant

$$(5) \qquad a_0^2 = \frac{H_0}{A(A+H_0)}, \quad b_0^2 = \frac{H_0}{B(B+H_0)},$$

ce qui donne

$$(6) \qquad u_0 = \sqrt{\frac{C}{C+H_0}}.$$

Semblablement u_1 acquerra une valeur constante, en posant

$$(7) \qquad a_1^2 = \frac{H_1}{A(A+H_1)}, \quad b_0^2 = \frac{H_1}{B(B+H_1)},$$

savoir

$$(8) \qquad u_1 = \sqrt{\frac{C}{C+H_1}}.$$

Dans ces hypothèses, l'équation (4) se change en

$$Z = 4\int_{u_1}^{u_0}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{P-Q}{(P-Qu^2)^2}\,du\,d\theta,$$

et, en vertu des valeurs de P et Q, l'intégrale relative à θ est

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{A(1-\alpha^2)\cos^2\theta + B(1-\beta^2)\sin^2\theta}{[A(1-\alpha^2u^2)\cos^2\theta + B(1-\beta^2u^2)\sin^2\theta]^2}\,d\theta$$
$$= \frac{\pi}{4\sqrt{AB}}\left(\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2u^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2u^2}\right)\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2u^2)(1-\beta^2u^2)}};$$

partant

$$(9) \qquad Z = \frac{\pi}{\sqrt{AB}}\int_{u_1}^{u_0}\left(\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2u^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2u^2}\right)\frac{du}{\sqrt{(1-\alpha^2u^2)(1-\beta^2u^2)}}.$$

Pour trouver le sens géométrique de ce résultat, j'observe qu'en donnant à H toujours le signe de C, l'équation

$$A^2x^2 + B^2y^2 - CHz^2 = 0$$

représente un cône à base elliptique, et que l'intersection de ce cône avec la surface représentée par l'équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

est une courbe à double courbure dont la projection horizontale est déterminée par l'équation

$$(10) \qquad A(A+H)x^2 + B(B+H)y^2 = H.$$

Quant aux valeurs de la quantité arbitraire H, on les peut toujours choisir tellement, que l'équation (10) représente une ellipse, dont les demi-axes sont réels, savoir

$$\sqrt{\frac{H}{A(A+H)}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{H}{B(B+H)}},$$

et comme ces valeurs s'accordent parfaitement avec celles qui sont indiquées aux n^os (5) et (7), on peut établir la proposition suivante :

« Les intersections de la surface représentée par l'équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

» par les deux cônes dont les équations sont

$$A^2x^2 + B^2y^2 - CH_0z^2 = 0,$$
$$A^2x^2 + B^2y^2 - CH_1z^2 = 0$$

» déterminent sur la première surface deux zones égales et symétri-
» quement opposées par rapport au plan de xy. L'aire de chacune
» de ces zones peut être exprimée, d'après la formule (9), par des in-
» tégrales elliptiques de première et de seconde espèce. »

La construction de ces deux cônes est d'ailleurs la même pour chacune des trois surfaces en question, car en substituant dans les équations de ces cônes les valeurs de A, B, C et en y posant

$$H_0 = \pm \frac{1}{h_0^2}, \quad H_1 = \pm \frac{1}{h_1^2},$$

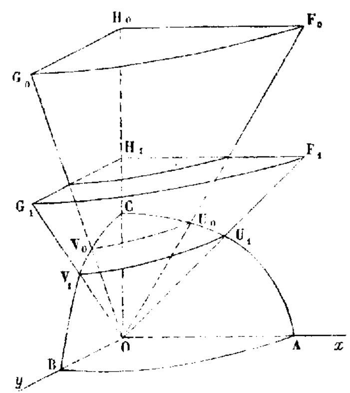
les signes supérieurs correspondants au cas où C est positif et les signes inférieurs à celui où C est négatif, on obtient toujours les mêmes équations, savoir

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{(ch_0)^2}=0,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{(ch_1)^2}=0.$$

D'après cela, ces cônes peuvent être construits en portant $OH_0 = h_0$

Fig. 1.



et $OH_1 = h_1$ sur l'axe des z et en menant les longueurs

$$F_0H_0 = F_1H_1 = \frac{\overline{OA}^2}{OC} = \frac{a^2}{c},$$

$$G_0H_0 = G_1H_1 = \frac{\overline{OB}^2}{OC} = \frac{b^2}{c}.$$

parallèles aux demi-axes a et b. Les ellipses F_0G_0 et F_1G_1 seront alors les bases de ces cônes. Dans le cas d'un ellipsoïde, les hauteurs h_0 et h_1 ne sont sujettes à aucune restriction; dans le cas d'un hyperboloïde à une nappe, il faut prendre $h_0 < a$ et $h_1 < a$; enfin, dans le cas d'un hyperboloïde à deux nappes, il faut prendre $h_0 > b$ et $h_1 > b$.

Pour réduire l'intégrale marquée (9) à des fonctions elliptiques, nous posons

$$(11)\qquad x = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{C-B}{C-A}}, \quad u = \frac{\sin\varphi}{\alpha}:$$

cela donne

$$\int \left(\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2 u^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 u^2} \right) \frac{du}{\sqrt{(1-\alpha^2 u^2)(1-\beta^2 u^2)}}$$
$$= \frac{1}{\alpha} \int \left(\frac{1-\alpha^2}{\cos^2\varphi} + \frac{1-\beta^2}{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi} \right) \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}$$
$$= \frac{1-\alpha^2}{\alpha(1-\varkappa^2)} [(1-\varkappa^2)\,F(\varphi) - E(\varphi) + \Delta(\varphi)\operatorname{tang}\varphi]$$
$$+ \frac{1-\beta^2}{\alpha(1-\varkappa^2)} \left[E(\varphi) - \frac{\varkappa^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta(\varphi)} \right]$$
$$= \frac{1}{C\alpha} \left[(C-A)\,E(\varphi) + AF(\varphi) + \frac{A-(C-B)\cos^2\varphi}{\Delta(\varphi)} \operatorname{tang}\varphi \right].$$

En posant, pour abréger,

$$(12)\qquad G(\varphi) = \frac{A-(C-B)\cos^2\varphi}{\Delta(\varphi)} \operatorname{tang}\varphi,$$

et en déterminant les limites de φ au moyen des formules

$$(13)\qquad \begin{cases} \sin\varphi_0 = \alpha u_0 = \sqrt{\dfrac{C-A}{C+H_0}}, \\ \sin\varphi_1 = \alpha u_1 = \sqrt{\dfrac{C-A}{C+H_1}}, \end{cases}$$

nous aurons la formule

$$(14)\qquad Z = \frac{\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}} \Big\{ (C-A)[E(\varphi_0) - E(\varphi_1)] + A[F(\varphi_0) - F(\varphi_1)] + G(\varphi_0) - G(\varphi_1) \Big\}$$

pour laquelle on peut écrire

$$(15)\qquad Z = \frac{\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}} [(C-A)\,E(\tau) + AF(\tau) + G(\varphi_0) - G(\varphi_1) - \varkappa^2 \sin\varphi_0 \sin\varphi_1 \sin\tau],$$

où l'amplitude τ est déterminée par la formule connue

$$(16)\qquad \sin\tau = \frac{\sin\varphi_0\cos\varphi_1\,\Delta(\varphi_1) - \sin\varphi_1\cos\varphi_0\,\Delta(\varphi_0)}{1 - \varkappa^2\sin^2\varphi_0\sin^2\varphi_1}.$$

Dans le cas d'un ellipsoïde, on peut donner à H_0 et H_1 les valeurs o ou ∞, ce qui conduit à des conséquences remarquables. Pour $H_0 = 0$ ou $h_0 = \infty$, la zone Z se change en une calotte dont la figure représente un quart (CU_1V_1). Soit Z_1 l'aire de cette calotte. La première des équations (13) donne dans cette hypothèse $\sin\varphi_0 = \alpha$ ou, en désignant par σ cette valeur particulière de φ_0,

$$(17)\qquad \sin\sigma = \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\varkappa},$$

et l'équation (13) devient

$$(18)\qquad Z_1 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\Big\{(a^2-c^2)[E(\sigma) - E(\varphi_1)] + c^2[F(\sigma) - F(\varphi_1)] + a^2c^2[G(\sigma) - G(\varphi_1)]\Big\}.$$

Dans l'hypothèse $H_1 = \infty$ ou $h_1 = 0$, la ligne d'intersection du cône, dont la hauteur est nulle, avec l'ellipsoïde, coïncide avec la trace horizontale AB. Alors la zone Z se change en une autre zone Z_0; la figure ABU_0V_0 en représente un quart, et les formules (13) et (14) donnent

$$(19)\qquad Z_0 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}[(a^2-c^2)E(\varphi_0) + c^2F(\varphi_0) + a^2c^2G(\varphi_0)].$$

Soit observé en passant qu'on peut déduire de cette expression la formule connue qui donne la moitié de l'aire de l'ellipsoïde en y supposant $h_0 = \infty$, partant $\varphi_0 = \sigma$.

La différence de Z_0 et Z_1 est

$$(20)\qquad Z_0 - Z_1 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\Big\{(a^2-c^2)[E(\varphi_0) + E(\varphi_1) - E(\sigma)] + c^2[F(\varphi_0) + F(\varphi_1) - F(\sigma)] + a^2c^2[G(\varphi_0) + G(\varphi_1) - G(\sigma)]\Big\},$$

et si l'on dispose sur h_0 et h_1 tellement que φ_0 et φ_1 satisfassent à la relation

$$(21)\qquad \cos\sigma = \cos\varphi_0 \cos\varphi_1 - \sin\varphi_0 \sin\varphi_1\, \Delta(\sigma),$$

on aura pour $Z_0 - Z_1$ la valeur algébrique

$$(22)\quad Z_0 - Z_1\, \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \left\{ (a^2 - c^2)\, x^2 \sin\varphi_0 \sin\varphi_1 \sin\sigma + a^2 c^2 [\mathrm{G}(\varphi_0) + \mathrm{G}(\varphi_1) - \mathrm{G}(\sigma)] \right\}.$$

En vertu de ces équations et en y exprimant tout au moyen de a, b, c, h, h_0, h_1,, on peut énoncer le théorème suivant :

« Quand les hauteurs h_0 et h_1 satisfont à l'équation

$$\frac{\sqrt{(a^2 + h_0^2)(a^2 + h_1^2)}}{a} - \frac{\sqrt{(c^2 + h_0^2)(c^2 + h_1^2)}}{c} = \frac{(a^2 - c^2)\, h_0 h_1}{abc},$$

» la différence entre les aires de la zone déterminée par le premier
» cône et de la calotte déterminée par le second est une expression
» algébrique, savoir

$$Z_0 - Z_1 = \pi \left[\frac{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)\, h_0 h_1}{ab\sqrt{(c^2 + h_0^2)(c^2 + h_1^2)}} - c^2 + \frac{(b^2 c^2 + c^2 a^2 - a^2 b^2 + c^2 h_0^2)\, h_0}{\sqrt{(a^2 + h_0^2)(b^2 + h_0^2)(c^2 + h_0^2)}} + \frac{(b^2 c^2 + c^2 a^2 - a^2 b^2 + c^2 h_1^2)\, h_1}{\sqrt{(a^2 + h_1^2)(b^2 + h_1^2)(c^2 + h_1^2)}} \right].$$

Ces formules deviennent très-simples dans le cas $h_0 = h_1$, c'est-à-dire quand il n'y a qu'un seul cône qui divise la surface du demi-ellipsoïde en une calotte Z_1 et en une zone Z_0. Les deux équations précédentes se réduisent alors, la première à

$$h = \sqrt{\frac{abc}{a + b + c}}$$

et la seconde à

$$Z_1 - Z_0 = \pi \left(ab - \frac{(a^2 + b^2)\, c}{a + b} \right).$$

On pourrait établir des propositions semblables à l'égard des hyperboloïdes, mais elles ne seraient pas de nature à donner des résultats aussi simples dans les hypothèses particulières. En tout cas, on peut regarder ces propositions comme analogues à celles de Fagnano sur l'ellipse et l'hyperbole.

La méthode dont nous avons fait usage pour la réduction de l'intégrale double au n° (3) s'applique aussi à l'intégrale multiple

$$\int\int\cdots x^{2m-1}y^{2n-1}\cdots f\left(\frac{1-Ax^2-By^2-\ldots}{1-A\alpha^2x^2-B\beta^2y^2-\ldots}\right)dx\,dy\ldots,$$

pourvu que les intégrations s'étendent à toutes les valeurs positives de x, y,..., qui satisfont aux deux conditions

$$\left(\frac{x}{a_0}\right)^2+\left(\frac{y}{b_0}\right)^2+\ldots\geqq 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{x}{a_1}\right)^2+\left(\frac{y}{b_1}\right)^2+\ldots\leqq 1.$$

Quant au résultat final, on le peut représenter sous la forme suivante. Supposons que l'intégrale proposée soit

$$S=\int\int\cdots\xi^{m-1}\eta^{n-1}\cdots f\left(\frac{1-\xi-\eta-\ldots}{1-\alpha\xi-\beta\eta-\ldots}\right)d\xi\,d\eta\ldots$$

et que les variables ξ, η,..., doivent satisfaire aux deux conditions

$$\frac{1-\lambda_0\alpha}{1-\lambda_0}\xi+\frac{1-\lambda_0\beta}{1-\lambda_0}\eta+\ldots\geqq 1,$$
$$\frac{1-\lambda_1\alpha}{1-\lambda_1}\xi+\frac{1-\lambda_1\beta}{1-\lambda_1}\eta+\ldots\leqq 1.$$

dans lesquelles λ_0 et λ_1 sont des quantités arbitraires entre 0 et 1; alors on a

$$S=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(1+m+n+\ldots)}\int_{\lambda_1}^{\lambda_0}\left(\frac{m(1-\alpha)}{1-\alpha t}+\frac{n(1-\beta)}{1-\beta t}+\ldots\right)\frac{(1-t)^{m+n+\ldots-1}\,dt}{(1-\alpha t)^m(1-\beta t)^n\ldots}.$$

En prenant $\lambda_0=1$, $\lambda_1=0$, on retombe sur une formule particulière donnée d'abord par M. Catalan.