JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème d'arithmétique

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 431-432.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__431_0>

THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre entier impair. Décomposons $4m$, de toutes les manières possibles, en une somme de quatre carrés impairs, et soit en conséquence

$$4m = i^2 + i'^2 + i''^2 + i'''^2,$$

i, i', i'', i''' désignant des entiers impairs, positifs; puis formons la somme

$$\sum (-1)^{\frac{ii'-1}{2}} ii'$$

relativement à toutes ces décompositions. Il faut, comme on voit, prendre dans toutes les décompositions le produit ii' affecté du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que ii' est de la forme $4\mu + 1$ ou de la forme $4\mu + 3$, après quoi l'on fera la somme algébrique de tous ces produits. Deux décompositions sont différentes dès que i, i', i'', i''' n'y ont pas identiquement les mêmes valeurs. C'est sous cette condition que Jacobi a trouvé le nombre des décompositions égal à la somme des diviseurs de m.

Considérons d'un autre côté les décompositions de $2m$ qui répondent à l'équation

$$2m = r^2 + r'^2 + 4s^2 + 4s'^2,$$

où r, r' sont des entiers impairs et positifs, tandis que s, s' sont indifféremment pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs. Il y aura une seconde somme

$$\sum (-1)^{\frac{rr'-1}{2}} rr',$$

relative à ce nouveau mode de partition.

Cela posé, je dis qu'il existe une relation très-simple entre les deux sommes

$$\sum (-1)^{\frac{ii'-1}{2}} ii'$$

et

$$\sum (-1)^{\frac{rr'-1}{2}} rr'.$$

En effet ces deux sommes ont toujours la même valeur absolue. Elles sont égales et de même signe quand $m = 4k + 1$, mais égales et de signe contraire quand $m = 4k + 3$. Ainsi on a toujours

$$\sum (-1)^{\frac{ii'-1}{2}} ii' = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sum (-1)^{\frac{rr'-1}{2}} rr'.$$

Je ne crois pas avoir besoin d'ajouter des exemples.

FIN DU TOME HUITIÈME (2e SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER, rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.