JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorèmes généraux concernant des fonctions numériques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 347-352.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__347_0>

THÉORÈMES GÉNÉRAUX CONCERNANT DES FONCTIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Soit m un nombre entier donné et n un nombre entier quelconque premier à m (l'unité est toujours une des valeurs de n). Soit de plus

$$n = d\delta,$$

en sorte que d représente un quelconque des diviseurs de n et δ le diviseur conjugué. Nous posons ces définitions et ces notations une fois pour toutes. On voit que l'entier n peut prendre une infinité de valeurs, et qu'à chaque valeur déterminée de n répondent en général diverses valeurs de d, δ. Mais n, d et δ n'ont jamais de facteur premier commun avec l'entier fixe m.

Cela étant, considérons cinq fonctions numériques de n, savoir

$$\mathrm{A}(n),\ \mathrm{G}(n),\ \mathrm{H}(n),\ \mathrm{P}(n),\ \mathrm{Q}(n),$$

vérifiant, pour chacune des valeurs indiquées de n, les deux relations

$$(1) \qquad \sum \mathrm{A}(d)\,\mathrm{G}(\delta) = \mathrm{H}(n)$$

et

$$(2) \qquad \sum \mathrm{A}(d)\,\mathrm{P}(\delta) = \mathrm{Q}(n),$$

où le signe

$$\sum$$

porte sur tous les groupes d, δ pour lesquels $n = d\delta$.

Il y aura naturellement une certaine relation entre les quatre fonctions

$$G(n),\ H(n),\ P(n),\ Q(n).$$

C'est cette relation que fournit notre premier théorème. Il consiste en ce que les relations (1) et (2) entraînent celle-ci :

$$\sum Q(d)\,G(\delta) = \sum P(d)\,H(\delta). \tag{3}$$

La démonstration, que nous supprimons pour le moment, est très-simple.

Remarquons en passant le cas particulier où l'on aurait toujours

$$A(d) = 1.$$

Les équations (1) et (2) se réduiraient alors à

$$\sum G(\delta) = H(n)$$

et

$$\sum P(\delta) = Q(n),$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\sum G(d) = H(n)$$

et

$$\sum P(d) = Q(n);$$

la relation (3) subsisterait.

2. La relation (3) est le résultat d'une sorte d'élimination entre les relations (1) et (2) où figure la fonction $A(n)$ dont la relation (3) ne dépend plus. Dans le théorème que nous allons donner maintenant, il y aura deux fonctions éliminées à la fois.

Considérons en effet six fonctions numériques

$$A(n),\ B(n),\ G(n),\ H(n),\ P(n),\ Q(n),$$

vérifiant pour toutes les valeurs de n indiquées plus haut les deux équations

$$(4)\qquad \sum A(d)\,G(\delta) = \sum B(d)\,H(\delta)$$

et

$$(5)\qquad \sum A(d)\,P(\delta) = \sum B(d)\,Q(\delta).$$

Admettons de plus que l'on n'ait pas constamment

$$A(n) = 0$$

et

$$B(n) = 0.$$

Je dis que les relations (4) et (5) entraîneront celle-ci

$$(6)\qquad \sum Q(d)\,G(\delta) = \sum P(d)\,H(\delta),$$

résultat remarquable, ce me semble, mais très-aisé encore à établir.

En considérant des fonctions numériques particulières, on tire de nos deux théorèmes une foule de conséquences plus ou moins curieuses.

5. Désignons actuellement par

$$D^{\mu}$$

un diviseur de n de l'ordre μ; en d'autres termes, soit D un diviseur de n tel, que D^{μ} divise aussi n. Puis admettons qu'entre deux fonctions numériques

$$f(n),\ F(n),$$

on ait, pour chacune des valeurs dont n est susceptible, la relation

$$(7)\qquad \sum f\left(\frac{n}{D^{\mu}}\right) = F(n),$$

le signe

$$\sum$$

portant sur toutes les valeurs que D comporte : l'unité est toujours une de ces valeurs.

Par l'équation (7), la fonction F s'exprime au moyen de la fonction f; mais on peut aussi s'en servir pour exprimer f au moyen de F.

Décomposons n en facteurs premiers sous la forme

$$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots g^\varepsilon \ldots,$$

et distinguons les nombres premiers a, b, c,..., dont les exposants α, β, γ,... sont égaux ou supérieurs à μ, des autres, tels que g, dont l'exposant ε est plus petit que μ. La valeur de

$$f(n)$$

sera

$$\mathrm{F}(n) - \sum \mathrm{F}\left(\frac{n}{a^\mu}\right) + \sum \mathrm{F}\left(\frac{n}{a^\mu b^\mu}\right) - \sum \mathrm{F}\left(\frac{n}{a^\mu b^\mu c^\mu}\right) + \ldots:$$

les signes sont alternativement + et −; par

$$\sum \mathrm{F}\left(\frac{n}{a^\mu}\right),$$

on désigne la somme

$$\mathrm{F}\left(\frac{n}{a^\mu}\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n}{b^\mu}\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n}{c^\mu}\right) + \ldots,$$

relative aux nombres premiers a, b, c,..., mais pas aux nombres premiers g, etc.; la somme

$$\sum \mathrm{F}\left(\frac{n}{a^\mu b^\mu}\right)$$

se rapporte à leurs produits deux à deux, et ainsi de suite.

4. Je dis qu'une fonction numérique

$$\psi(n)$$

est décomposable en facteurs quand on a

$$\psi(n) = \psi(a^\alpha)\,\psi(b^\beta)\ldots\psi(g^\varepsilon)\ldots,$$

a, b,..., g,..., désignant, comme il a été dit ci-dessus, les facteurs premiers distincts de n, à quoi j'ajoute la condition

$$\psi(1) = 1$$

dont j'ai reconnu l'utilité. Les fonctions numériques décomposables en facteurs ont des propriétés spéciales, et il est avantageux de savoir reconnaître si une fonction dont on s'occupe présente ou non ce caractère singulier.

Or on peut d'abord prouver que si l'une des deux fonctions

$$f(n), \quad F(n),$$

liées entre elles par l'équation (7), est décomposable en facteurs, l'autre fonction l'est également. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} f(a^\alpha) &= F(a^\alpha) - F(a^{\alpha-\mu}), \\ f(b^\beta) &= F(b^\beta) - F(b^{\beta-\mu}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

relativement aux nombres premiers a, b,... dont les exposants α, β,... sont au moins égaux à μ, et

$$\begin{aligned} f(g^\varepsilon) &= F(g^\varepsilon), \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

relativement aux autres. Le produit fournit la valeur de $f(n)$.

5. Soient

$$f(n), \quad F(n), \quad \psi(n)$$

trois fonctions numériques liées entre elles, pour toutes les valeurs que n peut prendre comme on l'a expliqué au n° **1**, par la relation

$$\sum f(d)\,\psi(\delta) = F(n). \tag{8}$$

Si deux de ces fonctions sont décomposables en facteurs, la troisième le sera aussi. Que, par exemple, $f(n)$ et $F(n)$ soient décomposables en facteurs; alors $\psi(n)$ le sera également, ce qui permettra au besoin de tirer plus facilement de l'équation (8) la valeur de $\psi(n)$.

Il en serait de même si au lieu de la relation (8) on avait celle-ci :

$$\sum f(d)\psi(\delta) = \sum \mathrm{F}(d). \tag{9}$$

6. Considérons enfin quatre fonctions numériques

$$f(n),\ \mathrm{F}(n),\ \psi(n),\ \varpi(n)$$

entre lesquelles on ait la relation

$$\sum f(d)\psi(\delta) = \sum \mathrm{F}(d)\varpi(\delta). \tag{10}$$

Si trois de ces fonctions jouissent de la propriété de se décomposer en facteurs, la quatrième aussi sera décomposable en facteurs.

7. Les propositions de nature diverse que je viens d'énoncer, et quelques autres qui les complètent, abrégent beaucoup certains calculs, et doivent (quoique fort simples) être regardées comme fondamentales dans la théorie des fonctions numériques. On en déduit une sorte d'algorithme régulier et général auquel j'ai fait allusion ailleurs (cahier de février 1858, p. 66). Je les ai démontrées et développées, il y a quelques années déjà, dans un de mes cours au Collége de France, et j'ai cru bon de disposer, pour en dire ici deux mots, de quelques pages qui restaient libres. Une autre fois j'entrerai dans tous les détails que le sujet exige quand on veut le soumettre à l'examen approfondi qu'il mérite. Observons seulement que nos théorèmes resteraient vrais si au lieu de prendre pour valeurs de n les nombres premiers à un entier donné m, on admettait tous les nombres entiers $1, 2, 3, \ldots$ sans exception. Cela revient à supposer $m = 1$, ce qui est permis. En faisant $m = 2$, on se réduirait aux nombres impairs.