JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V. PUISEUX

Note sur les systèmes de surfaces orthogonales

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 335-346.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__335_0>

NOTE

SUR

LES SYSTÈMES DE SURFACES ORTHOGONALES;

PAR M. V. PUISEUX.

J'entends, suivant l'usage, par *système de surfaces orthogonales* l'ensemble de trois groupes de surfaces tels, que toute surface de l'un quelconque des groupes soit coupée à angles droits par toutes celles des deux autres. Les surfaces d'un même groupe peuvent être représentées par une équation entre les coordonnées x, y, z et un paramètre qui varie d'une surface à l'autre : cette équation, si on la résout par rapport au paramètre, le donnera égal à une fonction de x, y, z qu'on peut concevoir développée en série suivant les puissances entières et positives de ces variables. Aux trois groupes de surfaces orthogonales répondront trois développements de ce genre : je me propose dans cette Note d'exprimer les coefficients de ces trois séries à l'aide d'indéterminées qu'on puisse choisir arbitrairement, en sorte qu'en attribuant à ces indéterminées toutes les valeurs possibles, on obtienne tous les systèmes possibles de surfaces orthogonales. Ce calcul, qui se réduit à la résolution d'équations linéaires, s'effectue aisément, comme on va le voir, pour les coefficients des termes d'un degré inférieur au quatrième; il devient plus compliqué à mesure que l'on considère des termes d'un degré plus élevé.

En se bornant, comme je le fais ici, aux termes du troisième degré, on obtient pour les coefficients des expressions d'où résultent immédiatement les beaux théorèmes de MM. Dupin et Lamé sur les surfaces orthogonales. La même analyse rend évidente cette remarque déjà faite par M. Bouquet (*Journal de Mathématiques*, t. XI, p. 446), qu'un groupe de surfaces pris au hasard ne peut pas en général faire partie d'un système orthogonal.

Soient X, Y, Z trois fonctions de x, y, z telles, qu'en les égalant à des paramètres arbitraires, on ait les équations de trois groupes de surfaces orthogonales. Supposons, ce qui est permis, les axes de coordonnées dirigés suivant les normales aux trois surfaces qui passent par l'origine O. Cette origine pouvant être un point quelconque, il est également permis de supposer les fonctions X, Y, Z développées suivant les puissances entières et positives de x, y, z en des séries qui seront convergentes, au moins pour de petites valeurs de x, y, z. Ces fonctions doivent satisfaire aux trois équations de condition

$$(1)\qquad \frac{dY}{dx}\frac{dZ}{dx}+\frac{dY}{dy}\frac{dZ}{dy}+\frac{dY}{dz}\frac{dZ}{dz}=0,$$

$$(2)\qquad \frac{dZ}{dx}\frac{dX}{dx}+\frac{dZ}{dy}\frac{dX}{dy}+\frac{dZ}{dz}\frac{dX}{dz}=0,$$

$$(3)\qquad \frac{dX}{dx}\frac{dY}{dx}+\frac{dX}{dy}\frac{dY}{dy}+\frac{dX}{dz}\frac{dY}{dz}=0,$$

qui expriment que les surfaces des trois groupes se coupent mutuellement à angles droits. De là résultent, entre les coefficients des développements en séries de X, Y, Z, des relations que nous allons chercher.

Nous pouvons admettre que les surfaces des trois groupes qui passent par l'origine répondent à des valeurs nulles des trois paramètres; car il suffirait pour remplir cette condition, si elle n'avait pas lieu, d'augmenter ces paramètres de quantités constantes. Les fonctions X, Y, Z s'annulant pour $x=0$, $y=0$, $z=0$, posons

$$X=\mathrm{a}x+\mathrm{b}y+\mathrm{c}z+\ldots,$$

les termes non écrits étant au moins du second degré. Mais les cosinus des angles que fait avec les axes la normale à la surface $X=0$ au point O sont proportionnels à a, b, c, et, d'un autre côté, cette normale doit se confondre avec l'axe des x : on a donc $\mathrm{b}=0$, $\mathrm{c}=0$. En outre, en multipliant par un facteur convenable le paramètre des surfaces X, on rendra le coefficient a égal à 1 : nous pouvons donc poser

$$X=x+ax^2+dy^2+gz^2+2Ayz+2Fzx+2Hxy+\ldots,$$

les termes non écrits étant au moins du troisième degré, et pareillement

$$Y = y + by^2 + ez^2 + hx^2 + 2Bzx + 2Dxy + 2Iyz + \ldots,$$
$$Z = z + cz^2 + fx^2 + iy^2 + 2Cxy + 2Eyz + 2Gzx + \ldots.$$

En substituant ces valeurs de Y et de Z dans l'équation (1), on trouve qu'elle devient

$$(B + C)x + (I + i)y + (E + e)z + \ldots = 0,$$

les termes non écrits étant du second degré au moins. Cette équation devant avoir lieu quelles que soient x, y, z, il en résulte

$$B + C = 0, \quad I + i = 0, \quad E + e = 0.$$

On trouvera de même à l'aide des équations (2) et (3), ou par la permutation des lettres,

$$C + A = 0, \quad G + g = 0, \quad F + f = 0,$$
$$A + B = 0, \quad H + h = 0, \quad D + d = 0.$$

Il suit de là

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$

$$D = -d, \quad E = -e, \quad F = -f, \quad G = -g, \quad H = -h, \quad I = -i.$$

On a donc

$$X = x + ax^2 + dy^2 + gz^2 - 2fzx - 2hxy + \ldots,$$
$$Y = y + by^2 + ez^2 + hx^2 - 2dxy - 2iyz + \ldots,$$
$$Z = z + cz^2 + fx^2 + iy^2 - 2eyz - 2gzx + \ldots,$$

où les neuf constantes $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ peuvent être prises arbitrairement.

Poussons maintenant les développements jusqu'aux termes du troisième degré, et posons

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} X = x + ax^2 + dy^2 + gz^2 - 2fzx - 2hxy + jx^3 + my^3 + pz^3 \\ + \alpha y^2 z + \delta yz^2 + \eta z^2 x + \varkappa zx^2 + \nu x^2 y + \rho xy^2 + \upsilon xyz + \ldots, \end{aligned} \right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{Y} = y + by^2 + ez^2 + hx^2 - 2dxy - 2iyz + ky^3 + nz^3 + qx^3 \\ &+ \beta z^2 x + \varepsilon zx^2 + \theta x^2 y + \lambda xy^2 + \xi y^2 z + \sigma yz^2 + \varphi xyz + \ldots, \end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{Z} = z + cz^2 + fx^2 + iy^2 - 2eyz - 2gzx + lz^3 + ox^3 + ry^3 \\ &+ \gamma x^2 y + \zeta xy^2 + \iota y^2 z + \mu yz^2 + \varpi z^2 x + \tau zx^2 + \chi xyz + \ldots, \end{aligned}\right.$$

les termes non écrits étant au moins du quatrième degré.

En substituant dans l'équation (1) les valeurs de Y et de Z qui viennent d'être écrites, on trouvera

$$\begin{aligned} &(4fh + \gamma + \varepsilon)x^2 + (4bi + 4ei + 3r + \xi)y^2 + (4ce + 4ei + 3n + \mu)z^2 \\ &+ (4dg - 4be - 4ci - 4e^2 - 4i^2 + 2\iota + 2\sigma)yz \\ &+ (4de - 4eg - 4gh + 2\beta + \chi)zx + (4gi - 4df - 4di + 2\zeta + \varphi)xy \\ &+ \ldots = 0, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant du troisième degré au moins. Cette équation devant avoir lieu quelles que soient x, y, z, il en résulte

$$(a_1)\qquad 4fh + \gamma + \varepsilon = 0,$$

$$(a_2)\qquad 4bi + 4ci + 3r + \xi = 0,$$

$$(a_3)\qquad 4ce + 4ei + 3n + \mu = 0,$$

$$(a_4)\qquad 2dg - 2be - 2ci - 2e^2 - 2i^2 + \iota + \sigma = 0,$$

$$(a_5)\qquad 4de - 4eg - 4gh + 2\beta + \chi = 0,$$

$$(a_6)\qquad 4gi - 4df - 4di + 2\zeta + \varphi = 0.$$

On trouvera de même à l'aide des équations (2) et (3), ou par la permutation des lettres,

$$(b_1)\qquad 4di + \alpha + \zeta = 0,$$

$$(b_2)\qquad 4cg + 4fg + 3p + \varpi = 0,$$

$$(b_3)\qquad 4af + 4fg + 3o + \varkappa = 0,$$

$$(b_4)\qquad 2eh - 2cf - 2ag - 2f^2 - 2g^2 + \eta + \tau = 0,$$

$$(b_5)\qquad 4ef - 4fh - 4hi + 2\gamma + \upsilon = 0,$$

$$(b_6)\qquad 4gh - 4de - 4eg + 2\delta + \chi = 0,$$

$(c_1)\qquad 4eg + \beta + \delta = 0,$

$(c_2)\qquad 4ah + 4dh + 3q + \nu = 0,$

$(c_3)\qquad 4bd + 4dh + 3m + \lambda = 0,$

$(c_4)\qquad 2fi - 2ad - 2bh - 2d^2 - 2h^2 + \theta + \rho = 0,$

$(c_5)\qquad 4df - 4di - 4gi + 2\alpha + \varphi = 0,$

$(c_6)\qquad 4hi - 4ef - 4fh + 2\varepsilon + \upsilon = 0.$

Les trente coefficients $j, k, l, m, n, o, p, q, r, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \varkappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \varpi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \varphi, \chi$ des termes du troisième degré devant satisfaire à ces dix-huit équations, pourront s'exprimer au moyen des neuf quantités $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ et de douze nouvelles arbitraires. Et d'abord, des équations (a_2), (b_2), (c_2), (a_3), (b_3), (c_3), nous tirons

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \varkappa &= -4af - 4fg - 3o,\\ \lambda &= -4bd - 4dh - 3m,\\ \mu &= -4ce - 4ei - 3n,\end{aligned}\right.$$

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \nu &= -4ah - 4dh - 3q,\\ \xi &= -4bi - 4ei - 3\tau,\\ \varpi &= -4cg - 4fg - 3p;\end{aligned}\right.$$

les équations (a_5), (b_5), (c_5), (a_6), (b_6), (c_6) nous donnent ensuite

$$\alpha = 2di + 2gi - 2df - \frac{1}{2}\varphi, \qquad \beta = 2eg + 2gh - 2de - \frac{1}{2}\chi,$$

$$\gamma = 2fh + 2hi - 2ef - \frac{1}{2}\upsilon, \qquad \delta = 2de + 2eg - 2gh - \frac{1}{2}\chi,$$

$$\varepsilon = 2ef + 2fh - 2hi - \frac{1}{2}\upsilon, \qquad \zeta = 2df + 2di - 2gi - \frac{1}{2}\varphi.$$

Portons ces dernières valeurs dans les équations (a_1), (b_1), (c_1), et nous trouverons

$$(9)\qquad \upsilon = 8fh,\quad \varphi = 8di,\quad \chi = 8eg,$$

43..

d'où il résulte

$$(10)\quad \alpha = 2(gi - df - di),\quad \beta = 2(gh - de - eg),\quad \gamma = 2(hi - ef - fh),$$
$$(11)\quad \delta = 2(de - eg - gh),\quad \varepsilon = 2(ef - fh - hi),\quad \zeta = 2(df - di - gi).$$

Il reste à satisfaire aux équations (a_4), (b_4), (c_4), et pour cela il suffira de prendre

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \eta &= 2(f^2 + g^2 + ag + cf - eh) - \tau, \\ \theta &= 2(d^2 + h^2 + bh + ad - fi) - \rho, \\ \iota &= 2(e^2 + i^2 + ci + be - dg) - \sigma. \end{aligned}\right.$$

On voit donc qu'en outre des neuf quantités a, b, c, d, e, f, g, h, i qui figurent dans les coefficients des termes du second degré, on pourra se donner arbitrairement les douze quantités j, k, l, m, n, o, p, q, r, ρ, σ, τ, et qu'alors les dix-huit autres coefficients des termes du troisième degré, savoir : α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, $\varkappa$, λ, μ, ν, ξ, ϖ, υ, φ, χ, seront déterminés par les formules (7), (8), (9), (10), (11), (12).

En continuant de la même manière, on trouvera que les coefficients des quarante-cinq termes du quatrième degré dans les fonctions X, Y, Z peuvent s'exprimer au moyen des vingt et une arbitraires précédentes et de quinze nouvelles; et généralement, si l'on pousse le développement de ces fonctions jusqu'aux termes du $n^{ième}$ degré, tous les coefficients pourront s'exprimer à l'aide de $\frac{3(n-1)(n+4)}{2}$ arbitraires.

Il me reste à indiquer quelques conséquences des formules qui précèdent.

Considérons la surface $Z = 0$. De ce que le terme en xy manque dans le développement de Z, on conclut qu'au point O les lignes de courbure de cette surface sont tangentes aux axes Ox, Oy. Mais les intersections de la même surface par les surfaces $Y = 0$, $X = 0$ sont aussi tangentes à ces axes : ces intersections sont donc tangentes en O aux lignes de courbure $Z = 0$. Comme d'ailleurs le point O est un point quelconque de l'espace, on voit que chacune de ces intersections est en tous ses points tangente à une des lignes de courbure de $Z = 0$, et par conséquent se confond avec une de ces lignes de courbure. On retrouve ainsi le théorème de M. Dupin, que dans un système de surfaces orthogonales chaque surface d'un groupe est coupée par celles des deux autres groupes suivant ses lignes de courbure [*].

Parmi les relations établies ci-dessus entre les coefficients des séries X, Y, Z, il y en a une, savoir :

$$\chi = 8eg,$$

qui ne contient que des coefficients de Z. Cette équation suffit pour établir qu'un groupe de surfaces ne peut pas en général faire partie d'un système orthogonal : car l'équation qui représente ce groupe, étant rapportée à des axes couvenables et résolue par rapport au paramètre variable ω, pourra bien se ramener à la forme

$$\begin{aligned} \omega = z + cz^2 + fx^2 + iy^2 - 2eyz - 2gzx + lz^3 + ox^3 + ry^3 \\ + \gamma x^2 y + \zeta xy^2 + \iota y^2 z + \mu yz^2 + \varpi z^2 x + \tau zx^2 + \chi xyz + \ldots ; \end{aligned}$$

mais il n'arrivera pas en général qu'on ait

$$\chi = 8eg.$$

Les développements des fonctions X, Y, Z ayant été poussés jusqu'aux termes du troisième degré, nous pouvons en déduire les variations différentielles au point O des rayons de courbure principaux de nos surfaces. A cet effet, regardons x, y, z comme de petites quantités du premier ordre, et formons, en y négligeant les quantités du second ordre, l'équation qui a pour racines les deux rayons de courbure principaux de la surface X = const. au point (x, y, z). En désignant par R l'un quelconque de ces rayons, et prenant pour X la valeur donnée par la formule (4), nous trouverons

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R}\right)^2 + 2 \left[\begin{array}{c} d + g - (2ad + 2ag + 4f^2 + 4h^2 - \eta - \rho) x \\ + (6dh + 2gh + 3m + \delta) y + (6fg + 2df + 3p + \alpha) z \end{array} \right] \frac{1}{R} \\ + 4 \left[\begin{array}{c} dg - (4adg + 4df^2 + 4gh^2 - d\eta - g\rho) x \\ + (8dgh + d\delta + 3gm) y + (8dfg + g\alpha + 3dp) z \end{array} \right] + \ldots = 0, \end{aligned}$$

[*] Dans ses leçons au Collége de France, M. Liouville a démontré le même théorème en développant en série, non pas la valeur du paramètre, mais celle de l'une des coordonnées x, y, z regardée comme fonction des deux autres.

les termes non écrits étant du deuxième ordre au moins. Nommons A_y, A_z les rayons de courbure principaux de la surface $X = \text{const.}$ au point (x, y, z), savoir : A_y celui de la section principale tangente à la courbe

$$X = \text{const.}, \quad Z = \text{const.},$$

et A_z celui de la section principale tangente à la courbe

$$X = \text{const.}, \quad Y = \text{const.};$$

A_y sera celle des deux valeurs de R qui est très-voisine de $-\frac{1}{2d}$, tandis que A_z sera très-voisin de $-\frac{1}{2g}$. On aura donc, aux quantités près du second ordre,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A_y} &= -2d + 2(2ad + 4h^2 - \rho)x - 6(2dh + m)y - 2(2df + \alpha)z + \ldots, \\
\frac{1}{A_z} &= -2g + 2(2ag + 4f^2 - \eta)x - 2(2gh + \delta)y - 6(2fg + p)z + \ldots,
\end{aligned}$$

ou bien, en exprimant les coefficients des seconds membres au moyen des quantités indépendantes $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, \rho, \sigma, \tau$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A_y} &= -2d + 2(2ad + 4h^2 - \rho)x - 6(2dh + m)y + 4(d - g)iz + \ldots, \\
\frac{1}{A_z} &= -2g + 2(2f^2 - 2g^2 - 2cf + 2eh + \tau)x - 2(d - g)ey \\
&\quad - 6(2fg + p)z + \ldots.
\end{aligned}$$

Il suit de là qu'au point O on a non-seulement

$$(13) \qquad \frac{1}{A_y} = -2d, \quad \frac{1}{A_z} = -2g,$$

mais encore

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{d\frac{1}{A_y}}{dx} = 2(2ad + 4h^2 - \rho), && \frac{d\frac{1}{A_y}}{dy} = -6(2dh + m), && \frac{d\frac{1}{A_y}}{dz} = 4(d - g)i, \\
&\frac{d\frac{1}{A_z}}{dx} = 2(2f^2 - 2g^2 - 2cf + 2eh + \tau), && \frac{d\frac{1}{A_z}}{dy} = -4(d - g)e, && \frac{d\frac{1}{A_z}}{dz} = -6(2fg + p).
\end{aligned} \right.$$

Nommons pareillement B_z et B_x les rayons de courbure principaux de la surface $Y =$ const., savoir : B_z celui de la section principale tangente à la courbe

$$Y = \text{const.}, \quad X = \text{const.},$$

et B_x celui de la section principale tangente à la courbe

$$Y = \text{const.}, \quad Z = \text{const.}$$

Enfin appelons C_x et C_y les rayons de courbure principaux de la surface $Z =$ const., savoir : C_x celui de la section principale tangente à la courbe

$$Z = \text{const.}, \quad Y = \text{const.},$$

et C_y celui de la section principale tangente à la courbe

$$Z = \text{const.}, \quad X = \text{const.}$$

En raisonnant comme on l'a fait pour établir les équations (13) et (14), ou bien en permutant les lettres qui y figurent, on trouvera qu'on a, au point O,

$$(15) \qquad \frac{1}{B_z} = -2e, \quad \frac{1}{B_x} = -2h,$$

$$(16) \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{d\frac{1}{B_z}}{dy} = 2(2be + 4i^2 - \sigma), & \dfrac{d\frac{1}{B_z}}{dz} = -6(2ei + n), & \dfrac{d\frac{1}{B_z}}{dx} = 4(e-h)g, \\ \dfrac{d\frac{1}{B_x}}{dy} = 2(2d^2 - 2h^2 - 2ad + 2fi + \rho), & \dfrac{d\frac{1}{B_x}}{dz} = -2(e-h)f, & \dfrac{d\frac{1}{B_x}}{dx} = -6(2dh + q), \end{array} \right.$$

et encore

$$(17) \qquad \frac{1}{C_x} = -2f, \quad \frac{1}{C_y} = -2i,$$

$$(18) \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{d\frac{1}{C_x}}{dz} = 2(2cf + 4g^2 - \tau), & \dfrac{d\frac{1}{C_x}}{dx} = -6(2fg + o), & \dfrac{d\frac{1}{C_x}}{dy} = 4(f-i)h, \\ \dfrac{d\frac{1}{C_y}}{dz} = 2(2e^2 - 2i^2 - 2be + 2dg + \sigma), & \dfrac{d\frac{1}{C_y}}{dx} = -2(f-i)d, & \dfrac{d\frac{1}{C_y}}{dy} = -6(2ei + r). \end{array} \right.$$

Dans les équations (14), (16) et (18), remplaçons d, e, f, g, h, i, par leurs valeurs tirées des équations (13), (15) et (17); il viendra, toujours pour le point O,

$$\frac{d\frac{1}{A_y}}{dx} = \frac{2}{B_x^2} - \frac{2a}{A_y} - 2\rho, \tag{19}$$

$$\frac{d\frac{1}{A_y}}{dy} = -\frac{3}{A_y B_z} - 6m, \tag{20}$$

$$\frac{d\frac{1}{A_y}}{dz} = \left(\frac{1}{A_y} - \frac{1}{A_z}\right)\frac{1}{C_y}, \tag{21}$$

$$\frac{d\frac{1}{A_z}}{dx} = \frac{1}{C_x^2} - \frac{1}{A_z^2} - \frac{1}{B_x B_z} + \frac{2c}{C_x} + 2\tau, \tag{22}$$

$$\frac{d\frac{1}{A_z}}{dy} = \left(\frac{1}{A_z} - \frac{1}{A_y}\right)\frac{1}{B_z}, \tag{23}$$

$$\frac{d\frac{1}{A_z}}{dz} = -\frac{3}{C_x A_z} - 6p, \tag{24}$$

$$\frac{d\frac{1}{B_z}}{dy} = \frac{2}{C_y^2} - \frac{2b}{B_z} - 2\sigma, \tag{25}$$

$$\frac{d\frac{1}{B_z}}{dz} = -\frac{3}{B_z C_y} - 6n, \tag{26}$$

$$\frac{d\frac{1}{B_z}}{dx} = \left(\frac{1}{B_z} - \frac{1}{B_x}\right)\frac{1}{A_z}, \tag{27}$$

$$\frac{d\frac{1}{B_x}}{dy} = \frac{1}{A_y^2} - \frac{1}{B_x^2} - \frac{1}{C_y C_x} + \frac{2a}{A_y} + 2\rho, \tag{28}$$

$$\frac{d\frac{1}{B_x}}{dz} = \left(\frac{1}{B_x} - \frac{1}{B_z}\right)\frac{1}{C_x}, \tag{29}$$

$$(30)\qquad \frac{d\dfrac{1}{B_x}}{dx} = -\frac{3}{A_y B_x} - 6q,$$

$$(31)\qquad \frac{d\dfrac{1}{C_x}}{dz} = \frac{2}{A_z^2} - \frac{2c}{C_x} - 2\tau,$$

$$(32)\qquad \frac{d\dfrac{1}{C_x}}{dx} = -\frac{3}{C_x A_z} - 6o,$$

$$(33)\qquad \frac{d\dfrac{1}{C_x}}{dy} = \left(\frac{1}{C_x} - \frac{1}{C_y}\right)\frac{1}{B_x},$$

$$(34)\qquad \frac{d\dfrac{1}{C_y}}{dz} = \frac{1}{B_z^2} - \frac{1}{C_y^2} - \frac{1}{A_z A_y} + \frac{2b}{B_z} + 2\varpi,$$

$$(35)\qquad \frac{d\dfrac{1}{C_y}}{dx} = \left(\frac{1}{C_y} - \frac{1}{C_x}\right)\frac{1}{A_y},$$

$$(36)\qquad \frac{d\dfrac{1}{C_y}}{dy} = -\frac{3}{B_z C_y} - 6r.$$

Remarquons spécialement les six formules (21), (23), (27), (29), (33), (35), et aussi ces trois autres qui résultent immédiatement de la combinaison des équations précédentes :

$$\frac{d\dfrac{1}{A_y}}{dx} + \frac{d\dfrac{1}{B_x}}{dy} = \frac{1}{A_y^2} + \frac{1}{B_x^2} - \frac{1}{C_x C_y},$$

$$\frac{d\dfrac{1}{B_z}}{dy} + \frac{d\dfrac{1}{C_y}}{dz} = \frac{1}{B_z^2} + \frac{1}{C_y^2} - \frac{1}{A_y A_z},$$

$$\frac{d\dfrac{1}{C_x}}{dz} + \frac{d\dfrac{1}{A_z}}{dx} = \frac{1}{C_x^2} + \frac{1}{A_z^2} - \frac{1}{B_z B_x}.$$

Dans ces neuf équations, qui ne renferment avec les dérivées des rayons de courbure principaux que ces rayons eux-mêmes, on peut regarder dx, dy, dz comme les différentielles des arcs des trois courbes formées par les trois intersections mutuelles des surfaces $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, prises deux à deux. Ces équations acquièrent alors une signification indépendante du choix des axes de cordonnées, et elles s'appliquent, non-seulement à l'origine, mais à un point quelconque de l'espace. Ainsi entendues, elles ne sont autre chose que les formules connues de M. Lamé.