JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Extrait d'une lettre de M. Liouville à M. Besge

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 311-312.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__311_0>

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. LIOUVILLE A M. BESGE.

« ... Soit m un nombre entier donné, de la forme $4\mu + 1$. Posons de toutes les manières possibles

$$2m = i^2 + i'^2$$

et

$$m = r^2 + 4s^2,$$

i, i', r désignant des entiers impairs positifs, tandis que l'entier s est indifféremment positif, nul ou négatif; puis, considérons les deux sommes

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

et

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r,$$

relatives à ces deux modes de décomposition pour un même entier m.

» Il existe entre ces deux sommes une relation simple; car elles sont égales et de même signe quand μ est pair, c'est-à-dire quand m est de la forme $8\nu + 1$, tandis qu'elles sont égales et de signe contraire quand μ est impair, c'est-à-dire quand m est de la forme $8\nu + 5$.

» En d'autres termes, on a

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i = (-1)^{\mu} \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r.$$

» Par exemple, pour $m = 1$, on a $2 = 1^2 + 1^2$ et $1 = 1^2 + 4.0^2$; dans ce cas la valeur commune des deux sommes est 1. Mais pour $m = 5$, les équations à employer sont $10 = 1^2 + 3^2$, $10 = 3^2 + 1^2$ et

$5 = 1^2 + 4(\pm 1)^2$. De là

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i = -2, \quad \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r = 2.$$

Les deux sommes sont donc cette fois égales, mais de signe contraire. Elles se retrouveraient égales et de même signe pour $m = 9$. Et ainsi de suite. Il peut arriver, bien entendu, qu'elles soient toutes les deux nulles : exemple $m = 21$. »