JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

CLEBSCH

Sur la surface qui coupe la courbe d'intersection de deux surfaces algébriques données dans les points de contact des plans osculateurs stationnaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 297-307.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__297_0>

Sur la surface qui coupe la courbe d'intersection de deux surfaces algébriques données dans les points de contact des plans osculateurs stationnaires;

PAR M. CLEBSCH.

M. Salmon, dans son excellent traité *Sur la Géométrie analytique à trois dimensions* (Dublin, 1862), remarque qu'il n'a pas réussi à réduire à la forme la plus simple l'équation d'une surface qui coupe dans les points de contact des plans osculateurs stationnaires la courbe d'intersection de deux surfaces algébriques données. Il ne me semble donc pas qu'il soit sans intérêt de donner dans ce qui suit la réduction dont il s'agit.

Soient $u = 0$ et $v = 0$ les équations de deux surfaces données, l'une du degré m, l'autre du degré n; désignons par u_i, v_i, u_{ik}, v_{ik} les quantités

$$(1)\quad \begin{cases} u_i = \dfrac{1}{m}\dfrac{du}{dx_i}, & v_i = \dfrac{1}{m}\dfrac{dv}{dx_i}, \\ u_{ik} = \dfrac{1}{m.m-1}\dfrac{d^2 u}{dx_i\,dx_k}, & v_{ik} = \dfrac{1}{n.n-1}\dfrac{d^2 v}{dx_i\,dx_k}, \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 étant des coordonnées homogènes d'un point quelconque x. A cause des équations (1), on a identiquement

$$(2)\quad \begin{cases} u_i = u_{i1}x_1 + u_{i2}x_2 + u_{i3}x_3 + u_{i4}x_4, \\ v_i = v_{i1}x_1 + v_{i2}x_2 + v_{i3}x_3 + v_{i4}x_4, \\ u = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4, \\ v = v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4. \end{cases}$$

Or M. Hesse a trouvé (*Journal de Crelle*, t. XLI) que l'équation du plan osculateur de la courbe d'intersection de u et v en un point x

prend la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} o = U(v_1 X_1 + v_2 X_2 + v_3 X_3 + v_4 X_4) \\ \quad - V(u_1 X_1 + u_2 X_2 + u_3 X_3 + u_4 X_4), \end{cases}$$

U et V désignant les covariants suivants :

$$(4)\qquad \begin{cases} U = (m-1)\begin{vmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} & u_{41} & v_1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & v_2 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & v_3 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & v_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & o \end{vmatrix}, \\ V = (n-1)\begin{vmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & u_1 \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} & u_2 \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} & u_3 \\ v_{14} & v_{24} & v_{34} & v_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & o \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Je commencerai par établir de nouveau cette équation de M. Hesse, la méthode employée par l'illustre géomètre d'Heidelberg étant susceptible de quelques simplifications. Concevons trois points consécutifs de la courbe x, $x + dx$, $x + 2dx + d^2x$; l'équation d'un plan passant par ces points, c'est-à-dire l'équation du plan osculateur, sera

$$(5)\qquad o = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 & d^2x_4 \end{vmatrix}.$$

Il y a entre les quantités dx, d^2x des relations qu'on trouve en différentiant deux fois les équations des surfaces données. Ayant égard aux notations adoptées, on obtient les équations

$$(6)\qquad \begin{cases} o = u_1\,dx_1 + u_2\,dx_2 + u_3\,dx_3 + u_4\,dx_4, \\ o = v_1\,dx_1 + v_2\,dx_2 + v_3\,dx_3 + v_4\,dx_4; \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} 0 = u_1 d^2x_1 + u_2 d^2x_2 + u_3 d^2x_3 + u_4 d^2x_4 \\ \qquad + (m-1)\Sigma\Sigma u_{ik}\, dx_i\, dx_k, \\ 0 = v_1 d^2x_1 + v_2 d^2x_2 + v_3 d^2x_3 + v_4 d^2x_4 \\ \qquad + (n-1)\Sigma\Sigma v_{ik}\, dx_i\, dx_k. \end{cases}$$

Or, si l'on multiplie le déterminant (5) par le déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix},$$

dans lequel les α, β sont des quantités quelconques, le produit, qui est lui-même un déterminant, contient à cause des équations (6) quelques termes évanouissants, et le reste se décompose en deux facteurs, dont l'un contenant les α, β est étranger au problème, tandis que l'autre qui est essentiel prend la forme

$$\begin{aligned} &(u_1 d^2x_1 + u_2 d^2x_2 + u_3 d^2x_3 + u_4 d^2x_4) \\ &\qquad\qquad (v_1 X_1 + v_2 X_2 + v_3 X_3 + v_4 X_4) \\ -&(v_1 d^2x_1 + v_2 d^2x_2 + v_3 d^2x_3 + v_4 d^2x_4) \\ &\qquad\qquad (u_1 X_1 + u_2 X_2 + u_3 X_3 + u_4 X_4). \end{aligned}$$

Ici on peut se servir des équations (7) pour éliminer les d^2x, et alors on a l'équation du plan osculateur sous la forme suivante

$$(8)\quad \begin{cases} 0 = (m-1)(v_1 X_1 + v_2 X_2 + v_3 X_3 + v_4 X_4)\,\Sigma\Sigma u_{ik}\, dx_i dx_k \\ \quad - (n-1)(u_1 X_1 + u_2 X_2 + u_3 X_3 + u_4 X_4)\,\Sigma\Sigma v_{ik}\, dx_i dx_k. \end{cases}$$

Les quantités dx sont assujetties aux deux équations (6); mais comme les coordonnées homogènes satisfont toujours à une équation linéaire de la forme

$$(9)\qquad k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4 = 1,$$

on en déduit une troisième équation

$$(10)\qquad k_1\,dx_1 + k_2\,dx_2 + k_3\,dx_3 + k_4\,dx_4 = 0.$$

En opérant par cette équation combinée avec les équations (6), il est évident que les quantités dx seront proportionnelles aux déterminants qui sortent du système incomplet

$$(10^a)\qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix}.$$

Introduisant donc ces valeurs proportionnelles au lieu des dx dans l'équation (9), on peut substituer aux deux sommes doubles les déterminants

$$(10^b)\qquad \left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_1 & v_1 & k_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_2 & v_2 & k_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & u_3 & v_3 & k_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & u_4 & v_4 & k_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\[2ex] \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & u_1 & v_1 & k_1 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & u_2 & v_2 & k_2 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} & u_3 & v_3 & k_3 \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & u_4 & v_4 & k_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \end{array}\right.$$

Pour transformer ces déterminants, il ne faut que multiplier leurs quatre premières colonnes par x_1, x_2, x_3, x_4 respectivement, les retrancher de la cinquième, et alors opérer de la même manière sur les séries. On détruit ainsi les termes u_i dans le premier déterminant, et les v_i dans le second; et au lieu des carrés formés par des zéros, on obtient les carrés suivants

$$\begin{matrix} -u & -v & -1 \\ -0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0, \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & -u & -1 \\ -u & -0 & 0 \\ -1 & 0 & 0. \end{matrix}$$

Les fonctions u, o s'évanouissant pour les points dont il s'agit, on peut mettre o à la place des u, v, et les déterminants proposés se trouvent alors réduits au carré de 1, multiplié par les déterminants désignés au-dessus par $\frac{U}{m-1}$, $\frac{V}{n-1}$. De cette manière, l'équation (8) se trouve réduite à la forme (3), qui est la forme donnée par M. Hesse.

Passons à l'investigation des points x de la courbe donnée qui sont situés avec les trois points consécutifs dans le même plan, plan osculateur stationnaire. On peut partir de deux points de vue différents. En premier lieu, on revient à l'équation (3), et on établit la condition nécessaire pour que le plan osculateur mené à un point très-voisin $x + dx_1$ coïncide avec le plan osculateur mené au point x, c'est-à-dire la condition nécessaire pour que les équations

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma X_i (U v_i - V u_i) = 0, \\ &\Sigma X_i [(U + dU\ldots)(v_i + dv_i\ldots) - (V + dV\ldots)(u_i + du_i\ldots)] = 0 \end{aligned} \right.$$

représentent le même plan.

En retranchant la première des équations (11) de la seconde et en ne conservant que les termes du premier ordre, on aura l'équation

$$\Sigma X_i (v_i dU + U dv_i - u_i dV - v_i dU_i) = 0,$$

laquelle, ne pouvant être différente pour les points dont il s'agit de la première des équations (11) que par un facteur commun, donne naissance aux quatre équations suivantes

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} v_1 dU + U dv_1 - u_1 dV - V du_1 &= (U v_1 - V u_1) ds, \\ v_2 dU + U dv_2 - u_2 dV - V du_2 &= (U v_2 - V u_2) ds, \\ v_3 dU + U dv_3 - u_3 dV - V du_3 &= (U v_3 - V u_3) ds, \\ v_4 dU + U dv_4 - u_4 dV - V du_4 &= (U v_4 - V u_4) ds, \end{aligned} \right.$$

où ds désigne un facteur inconnu infiniment petit. Ces quatre équations sont linéaires quant aux cinq quantités dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, ds, et comme on a à vérifier en outre les trois équations (6), (10), qui contiennent ces mêmes quantités, on pourrait croire qu'on devait obtenir trois équations finies entre x_1, x_2, x_3, x_4, en chassant de ces sept équations les cinq quantités infiniment petites. Mais on voit facilement qu'on peut former deux combinaisons des équations (12), qui s'évanouissent identiquement à l'aide des équations $u=0$, $v=0$, de manière qu'en effet les équations (12), (6), (10) ne représentent que cinq équations diverses. On obtient la première de ces combinaisons en multipliant les équations (12) par x_1, x_2, x_3, x_4, où la somme des produits s'évanouit à cause des équations

$$\begin{gathered}x_1\,du_1+x_2\,du_2+x_3\,du_3+x_4\,du_4=0,\\ x_1\,dv_1+x_2\,dv_2+x_3\,dv_3+x_4\,dv_4=0,\end{gathered}$$

qui sont une conséquence nécessaire des équations $u=0$, $v=0$. La seconde sera obtenue en multipliant les équations (12) par dx_1, dx_2, dx_3, dx_4. Alors dans la somme se détruisent quelques termes à l'aide des équations (6), et on obtiendra

$$\begin{aligned}0&=\mathrm{U}\,\Sigma\,dx_i\,dv_i-\mathrm{V}\,\Sigma\,dx_i\,du_i\\ &=\mathrm{U}\,\Sigma\Sigma(n-1)\,v_{ik}\,dx_i\,dx_k-\mathrm{V}\,\Sigma\Sigma(m-1)\,u_{ik}\,dx_i\,dx_k.\end{aligned}$$

Mais les sommes doubles qui entrent dans cette formule sont proportionnelles aux fonctions U, V, elles-mêmes; d'où il suit que cette combinaison elle-même s'évanouit identiquement.

Pour former deux autres combinaisons des équations (12) qui ne s'évanouissent pas, j'ordonne les expressions de U et V (4) suivant les quantités u_i, v_i, qui en forment une colonne, et en désignant par A_i l'ensemble des termes qui sont multipliés par v_i dans le déterminant U, par B_i les termes multipliés par u_i dans le déterminant V, j'écris

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathrm{U}&=v_1\,\mathrm{A}_1+v_2\,\mathrm{A}_2+v_3\,\mathrm{A}_3+v_4\,\mathrm{A}_4,\\ \mathrm{V}&=u_1\,\mathrm{B}_1+u_2\,\mathrm{B}_2+u_3\,\mathrm{B}_3+u_4\,\mathrm{B}_4.\end{aligned}\right.$$

Or je multiplie les équations (12) par A_1, A_2, A_3, A_4 et par B_1, B_2,

B_3, B_4; alors, en faisant les sommes, on obtient

$$(14)\quad \begin{cases} U\,dU + U(A_1\,dv_1 + A_2\,dv_2 + A_3\,dv_3 + A_4\,dv_4) = U^2\,ds, \\ V\,dV + V(B_1\,du_1 + B_2\,du_2 + B_3\,du_3 + B_4\,du_4) = V^2\,ds. \end{cases}$$

ou, en chassant les facteurs U, V,

$$(15)\quad \begin{cases} dU + A_1\,dv_1 + A_2\,dv_2 + A_3\,dv_3 + A_4\,dv_4 = U\,ds, \\ dV + B_1\,du_1 + B_2\,du_2 + B_3\,du_3 + B_4\,du_4 = V\,ds. \end{cases}$$

En formant les équations (14), on a omis quelques termes; ce sont ceux qui sont multipliés par

$$\Sigma A_i u_i, \quad \Sigma A_i\,du_i, \quad \Sigma B_i v_i, \quad \Sigma B_i\,dv_i.$$

Il est facile de démontrer que ces expressions s'évanouissent à cause des équations $u = 0$, $v = 0$. Commençons par la discussion de l'expression $\Sigma A_i u_i$, c'est-à-dire du déterminant U, les quantités u_i mises à la place de la série des v_i. Mais cela fait, si l'on retranche de la série en question les autres séries multipliées par x_1, x_2, x_3, x_4, tous les termes u_i disparaissent, et au lieu de zéro on a v, ce qui s'évanouit; donc l'expression dont il s'agit s'évanouit aussi. De la même manière s'évanouit la somme $\Sigma B_i v_i$. Pour faire voir la même propriété de $\Sigma A_i dv_i$, c'est-à-dire du déterminant U, les du_i mis à la place de la série des v_i, on retranche de la dernière série les autres séries multipliées par $(m-1)\,dx_1$, etc., et on fera de même de la somme $\Sigma B_i\,dv_i$.

Cela posé, on peut se servir des équations (6), (10) et (15) au lieu de (6), (10) et (12). Faisons, à l'analogie de l'équation (1),

$$U_i = \frac{1}{3m-2n-8}\frac{dU}{dx_i}, \quad V_i = \frac{1}{3n+2m-8}\frac{dV}{dx_i},$$

$3m+2n-8$ et $3n+2m-8$ étant les ordres des fonctions U, V. Alors les équations (15) peuvent être mises sous la forme

$$(16)\quad \begin{cases} \Sigma dx_i[(3m+2n-8)\,U_i + (n-1)\,\Sigma_k A_k v_{ik}] = U\,ds, \\ \Sigma dx_i[(3n+2m-8)\,V_i + (m-1)\,\Sigma_k B_k u_{ik}] = V\,ds, \end{cases}$$

Donc, si l'on égale à zéro le déterminant des équations linéaires (6), (10) et (16), on aura l'équation

$$\begin{vmatrix} (3m+2n-8)U_1+(n-1)\Sigma_k A_k v_{1k} & (3n+2m-8)V_1+(m-1)\Sigma_k B_k u_{1k} & u_1 & v_1 & k_1 \\ (3m+2n-8)U_2+(n-1)\Sigma_k A_k v_{2k} & (3n+2m-8)V_2+(m-1)\Sigma_k B_k u_{2k} & u_2 & v_2 & k_2 \\ (3m+2n-8)U_3+(n-1)\Sigma_k A_k v_{3k} & (3n+2m-8)V_3+(m-1)\Sigma_k B_k u_{3k} & u_3 & v_3 & k_3 \\ (3m+2n-8)U_4+(n-1)\Sigma_k A_k v_{4k} & (3n+2m-8)V_4+(m-1)\Sigma_k B_k u_{4k} & u_4 & v_4 & k_4 \\ U & V & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On en forme l'équation définitive dont il s'agit en chassant les coefficients k, ce qui se fait si l'on multiplie les quatre premières séries par x_1, x_2, x_3, x_4, et si l'on en retranche la somme de la dernière multipliée par $3m+3n-9$. Dans la dernière série, on aura alors 0 à la place de U, V et u, v, 1 ou 0, 0, 1 à la place des zéros qui s'y trouvent; donc des cinq termes de cette série quatre termes s'évanouissent, et on aura, au lieu du déterminant proposé, ce qui est multiplié par le cinquième terme, c'est-à-dire le déterminant

$$(17)\quad \begin{vmatrix} (3m+2n-8)U_1+(n-1)\Sigma_k A_k v_{1k} & (3n+2m-8)V_1+(m-1)\Sigma_k B_k u_{1k} & u_1 & v_1 \\ (3m+2n-8)U_2+(n-1)\Sigma_k A_k v_{2k} & (3n+2m-8)V_2+(m-1)\Sigma_k B_k u_{2k} & u_2 & v_2 \\ (3m+2n-8)U_3+(n-1)\Sigma_k A_k v_{3k} & (3n+2m-8)V_3+(m-1)\Sigma_k B_k u_{3k} & u_3 & v_3 \\ (3m+2n-8)U_4+(n-1)\Sigma_k A_k v_{4k} & (3n+2m-8)V_4+(m-1)\Sigma_k B_k u_{4k} & u_4 & v_4 \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation représente une surface de l'ordre $6m+6n-20$ qui coupe les surfaces $u=0$, $v=0$ dans les $mn(6m+6n-20)$ points de contact des plans osculateurs stationnaires, nombre que M. Salmon a trouvé.

Lorsque les surfaces u, v sont toutes deux du deuxième ordre, les sommes $\Sigma_k A_k v_{ik}$, $\Sigma_k B_k u_{ik}$ deviennent égales à U_i, V_i, et l'équation (17) se trouve réduite à la forme plus simple

$$\begin{vmatrix} U_1 & V_1 & u_1 & v_1 \\ U_2 & V_2 & u_2 & v_2 \\ U_3 & V_3 & u_3 & v_3 \\ U_4 & V_4 & u_4 & v_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Une autre méthode de former l'équation (17) diffère de la méthode qu'on a fait voir, en ce qu'on forme d'une manière plus directe les équations (15), et que l'on effectue en même temps la transformation que M. Salmon a demandée. La condition nécessaire pour que quatre points infiniment voisins de la courbe $u = 0$, $v = 0$ soient situés dans le même plan sera

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 & d^2x_4 \\ d^3x_1 & d^3x_2 & d^3x_3 & d^3x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions le déterminant qui forme le premier terme de cette équation par le déterminant formé par les quantités u_i, v_i et par deux autres séries quelconques. A cause des équations (2) et (6), quelques éléments du déterminant résultant s'évanouissent, et le reste devient le produit de deux facteurs, dont l'un est étranger à la question, tandis que l'autre donnera l'équation

$$\begin{vmatrix} \Sigma u_i d^2 x_i & \Sigma u_i d^3 x_i \\ \Sigma v_i d^2 x_i & \Sigma v_i d^3 x_i \end{vmatrix} = 0,$$

équation au lieu de laquelle on peut mettre les deux suivantes

$$(18) \qquad \begin{cases} \Sigma u_i d^2 x_i = ds . \Sigma u_i d^3 x_i, \\ \Sigma v_i d^2 x_i = ds . \Sigma v_i d^3 x_i, \end{cases}$$

ds étant une quantité infiniment petite. Cependant, par un choix convenable d'un élément ds, on tire des équations (b) et (c)

$$(19) \qquad \begin{cases} \Sigma u_i d^2 x_i = -(m-1)\Sigma\Sigma u_{ik} dx_i dx_k = -ds^2 . \mathrm{U}, \\ \Sigma v_i d^2 x_i = -(n-1)\Sigma\Sigma v_{ik} dx_i dx_k = -ds^2 . \mathrm{V}. \end{cases}$$

Donc, en différentiant et regardant ds comme élément constant,

$$(20) \qquad \begin{cases} \Sigma u_i d^3 x_i = -(m-1)\Sigma\Sigma u_{ik} d^2 x_i dx_k - ds^2 . d\mathrm{U}, \\ \Sigma v_i d^3 x_i = -(n-1)\Sigma\Sigma v_{ik} d^2 x_i dx_k - ds^2 . d\mathrm{V}. \end{cases}$$

L'élément ds est le même par lequel les quantités dx doivent être divisées pour devenir égales aux déterminants partiels du système incomplet (10^a). De là on conclut que les quantités $\frac{d^2x}{ds^2}$ sont les sommes des déterminants partiels correspondants formés des deux systèmes incomplets

$$\begin{vmatrix} \frac{du_1}{ds} & \frac{du_2}{ds} & \frac{du_3}{ds} & \frac{du_4}{ds} \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ k_1 & h_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \frac{dv_1}{ds} & \frac{dv_2}{ds} & \frac{dv_3}{ds} & \frac{dv_4}{ds} \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix},$$

ou que l'on a

$$(m-1)\Sigma\Sigma u_{ik}\frac{d^2x_i}{ds^2}\frac{dx_k}{ds} = \begin{vmatrix} \frac{du_1}{ds} & \frac{du_2}{ds} & \frac{du_3}{ds} & \frac{du_4}{ds} \\ \frac{dv_1}{ds} & \frac{dv_2}{ds} & \frac{dv_3}{ds} & \frac{dv_4}{ds} \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix}$$

$$= -(m-1)\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_1 & v_1 & k_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_2 & v_2 & k_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & u_3 & v_3 & k_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & u_4 & v_4 & k_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{dv_1}{ds} & \frac{dv_2}{ds} & \frac{dv_3}{ds} & \frac{dv_4}{ds} & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$(n-1)\Sigma\Sigma v_{ik}\frac{d^2x_i}{ds^2}\frac{dx_k}{ds} = \begin{vmatrix} \frac{dv_1}{ds} & \frac{dv_2}{ds} & \frac{dv_3}{ds} & \frac{dv_4}{ds} \\ \frac{du_1}{ds} & \frac{du_2}{ds} & \frac{du_3}{ds} & \frac{du_4}{ds} \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix}$$

$$= -(n-1)\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & u_1 & v_1 & k_1 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & u_2 & v_2 & k_2 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} & u_3 & v_3 & k_3 \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & u_4 & v_4 & k_4 \\ \frac{du_1}{ds} & \frac{du_2}{ds} & \frac{du_3}{ds} & \frac{du_4}{ds} & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Lorsqu'on traite ces déterminants comme on a traité les déterminants (10^b), ils prennent les formes

$$(m-1)\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & v_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & v_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & v_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & v_4 \\ \frac{dv_1}{ds} & \frac{dv_2}{ds} & \frac{dv_3}{ds} & \frac{dv_4}{ds} & 0 \end{vmatrix} = A_1\frac{dv_1}{ds} + A_2\frac{dv_2}{ds} + A_3\frac{dv_3}{ds} + A_4\frac{dv_4}{ds},$$

$$(n-1)\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & u_1 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & u_2 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} & u_3 \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & u_4 \\ \frac{du_1}{ds} & \frac{du_2}{ds} & \frac{du_3}{ds} & \frac{du_4}{ds} & 0 \end{vmatrix} = B_1\frac{du_1}{ds} + B_2\frac{du_2}{ds} + B_3\frac{du_3}{ds} + B_4\frac{du_4}{ds}.$$

Si l'on introduit ces expressions et les expressions (19) dans les équations (20), les équations (18) deviennent

$$dU + A_1\,dv_1 + A_2\,dv_2 + A_3\,dv_3 + A_4\,dv_4 = U\,ds,$$
$$dV + B_1\,du_1 + B_2\,du_2 + B_3\,du_3 + B_4\,du_4 = V\,ds;$$

ce sont précisément les équations (15) qu'il s'agissait de trouver.

(Carlsruhe, 3 septembre 1862.)