JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Remarque nouvelle sur la forme $x^2 + y^2 + 3\left(z^2 + t^2\right)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 296.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__296_0>

REMARQUE NOUVELLE SUR LA FORME $x^2+y^2+3(z^2+t^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

J'ai donné (dans le cahier de mai 1860, p. 147) une expression simple du nombre des solutions que comporte l'équation

$$n = x^2+y^2+3(z^2+t^2),$$

où n est un entier donné, quand on y prend pour x, y, z, t des entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs. Mais quel serait le nombre des solutions de cette même équation si l'on n'admettait pour x, y, z, t que des valeurs impaires et positives? Pour répondre à cette question, j'observe d'abord que l'équation dont il s'agit deviendra alors impossible si n n'est pas un multiple de 8. Maintenant soit n multiple de 8; on pourra écrire

$$n = 8.3^{\beta}.2^{\gamma}m,$$

m étant un entier impair premier à 3, et je dis que le nombre demandé sera égal à

$$2^{\gamma}\zeta_1(m),$$

où je désigne à mon ordinaire par $\zeta_1(m)$ la somme des diviseurs de m.

Ainsi pour $n=8$ on n'a qu'une seule solution, laquelle est fournie par l'identité

$$8 = 1^2+1^2+3(1^2+1^2).$$

Pour $n=16$, on doit avoir deux solutions. La double équation

$$16 = 1^2+3^2+3(1^2+1^2) = 3^2+1^2+3(1^2+1^2)$$

confirme ce fait. Pour $n=24$ et pour $n=32$, le nombre de solutions deviendra égal à 4. Pour $n=40$, il sera égal à 6. Mais je n'ai pas à insister sur ces vérifications numériques.