JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 48t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 255-256.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__255_0>

SUR LA FORME
$3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 48t^2$;
PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre

$$N(n = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 48t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 48t^2,$$

n'offre aucune difficulté quand cet entier est impair et $\equiv 1 \pmod{4}$, ou quand il est impairement pair, ou enfin quand il est $\equiv 2 \pmod{3}$; car on a alors évidemment

$$N(n = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 48t^2) = 0.$$

On voit tout de suite aussi que la valeur de

$$N(4q = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 48t^2)$$

est égale à celle de

$$N(q = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2)$$

qui a été donnée plus haut, dans ce cahier même. Enfin la valeur de

$$N(3q = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 48t^2)$$

est égale à celle de

$$N(q = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2)$$

qui a été donnée dans le cahier de juin (p. 205).

2. Nous n'avons donc à nous occuper que du cas de n impair $\equiv 3$ (mod. 4) et $\equiv 1$ (mod. 3), c'est-à-dire du cas de

$$n = 12k - 5.$$

Ce cas exige une étude spéciale; mais enfin on arrive au but. Dans les premières pages de ce cahier, nous avons en effet donné la valeur de

$$N(12k - 5 = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2).$$

Or, si l'on en prend la moitié, et qu'on y ajoute ou qu'on en retranche (suivant que k est pair ou impair) la somme

$$\sigma = \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j$$

relative à l'équation

$$4(12k - 5) = i^2 + 3j^2$$

où i et j sont des entiers impairs positifs, on aura précisément la valeur demandée de

$$N(12k - 5 = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 48t^2).$$

La question proposée est ainsi complétement résolue.