JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 249-252.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__249_0>

SUR LA FORME

$$x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Le nombre

$$N(n = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2,$$

est évidemment nul quand

$$n = 3q + 2.$$

Le cas de

$$n = 3q$$

est facile aussi à traiter, la valeur de

$$N(3q = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2)$$

étant égale à celle de

$$N(q = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2)$$

qui a été donnée dans le cahier de juin (p. 185).

Nous n'avons donc à étudier que le cas de

$$n = 3q + 1.$$

2. Commençons par les entiers impairs $n = 3q + 1$, ou plutôt

$$n = 6l + 1.$$

J'arrive pour eux à la formule

$$N(n = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2) = \sum + \sigma,$$

où

$$\sum$$

représente la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $n = d\delta$, tandis que

$$\sigma$$

désigne la somme

$$\sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j$$

qui concerne l'équation

$$4n = i^2 + 3j^2$$

où les entiers i et j sont impairs et positifs.

Ainsi, pour $n = 1$, on aura deux représentations : elles sont fournies par l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 3.0^2 + 12.0^2 + 12.0^2.$$

Pour $n = 7$, le nombre des représentations sera

$$6 - 2 = 4;$$

l'équation

$$7 = (\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 12.0^2 + 12.0^2$$

confirme ce fait.

3. Le cas d'un nombre impairement pair ne donne lieu à aucune difficulté; on a évidemment alors

$$N(n = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2) = 0.$$

Il ne reste donc plus que les entiers pairement pairs (de la forme

$3q+1$ bien entendu) lesquels se divisent en quatre classes, savoir

$$n = 2^{2\gamma+2} m$$

avec

$$m = 12k+1 \quad \text{ou} \quad 12k-5,$$

et

$$n = 2^{2\gamma+3} m$$

avec

$$m = 12k+5 \quad \text{ou} \quad 12k-1.$$

De quelque classe qu'il s'agisse, nous représenterons par la simple lettre

$$\Sigma$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d,$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$.

Je trouve d'une part

$$\mathrm{N}\left(2^{2\gamma+2} m = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2\right) = 2\left(2^{2\gamma+2} - 1\right) \Sigma$$

quand

$$m = 12k+1,$$

mais

$$\mathrm{N}\left(2^{2\gamma+2} m = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2\right) = 2\left(2^{2\gamma+2} + 1\right) \Sigma$$

quand

$$m = 12k-5.$$

D'autre part

$$\mathrm{N}\left(2^{2\gamma+3} m = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2\right) = 2\left(2^{2\gamma+3} + 1\right) \Sigma$$

quand

$$m = 12k+5,$$

et

$$N\left(2^{2\gamma+3}m = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2\right) = 2\left(2^{2\gamma+3} - 1\right)\sum$$

quand

$$m = 12k - 1.$$

On peut prendre $\gamma = 0$ dans ces formules. Il vient ainsi

$$N(4m = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2) = 6\sum$$

quand

$$m = 12k + 1,$$

mais

$$N(4m = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2) = 10\sum$$

quand

$$m = 12k - 5;$$

puis

$$N(8m = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2) = 18\sum$$

quand

$$m = 12k + 5,$$

enfin

$$N(8m = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2) = 14\sum$$

quand

$$m = 12k - 1.$$