JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 243-248.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__243_0>

SUR LA FORME
$x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2$;
PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande le nombre

$$N(n = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2.$$

Pour répondre à cette question, nous remarquerons d'abord que l'on a évidemment

$$N(3q + 2 = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2) = 0.$$

On voit aussi que la valeur de

$$N(3q = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2)$$

est égale à celle de

$$N(q = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2)$$

que nous avons déterminée dans le cahier de juin (p. 182).

Le cas de

$$n = 3q + 1$$

est donc le seul qui reste à examiner.

2. Les entiers impairs de la forme $3q+1$ se divisent en deux classes. On peut avoir

$$n = 12k + 1$$

ou

$$n = 12k - 5.$$

Qu'il s'agisse de l'un ou de l'autre de ces deux cas, nous aurons à introduire la fonction

$$\sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d,$$

relative aux groupes de diviseurs conjugués d, δ de l'entier $n = d\delta$. Nous la représenterons, pour abréger, par la simple lettre

$$\sum.$$

Nous aurons à considérer aussi la fonction

$$\sigma = \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j,$$

où le signe sommatoire porte sur les entiers impairs et positifs qui peuvent appartenir à l'équation

$$4n = i^2 + 3j^2,$$

dans laquelle l'entier i est aussi impair et positif.

Cela étant, je trouve que

$$N(n = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2) = \sum + \sigma$$

quand

$$n = 12k + 1;$$

mais

$$N(n = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2) = 3\sum + \sigma$$

quand

$$n = 12k - 5.$$

Ainsi, pour $n = 1$, le nombre des représentations est

$$1 + 1 = 2;$$

et cela s'accorde avec l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 3.0^2 + 3.0^2 + 12.0^2.$$

Pour $n = 13 = 12 + 1$, on a

$$\sum = 14$$

et

$$\sigma = -2.$$

Il doit donc y avoir douze représentations. Les équations

$$13 = (\pm 1)^2 + 3(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 12.0^2,$$
$$13 = (\pm 1)^2 + 3.0^2 + 3(\pm 2)^2 + 12.0^2,$$
$$13 = (\pm 1)^2 + 3.0^2 + 3.0^2 + 12(\pm 1)^2$$

confirment ce fait.

Parmi les entiers $12k - 5$, prenons $n = 7$. On a alors

$$\sum = 6$$

et

$$\sigma = -2.$$

Le nombre des représentations est donc cette fois

$$3.6 - 2 = 16.$$

On vérifie qu'il en est ainsi au moyen des identités

$$7 = (\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 12.0^2,$$
$$7 = (\pm 2)^2 + 3.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 12.0^2,$$
$$7 = (\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 12.0^2.$$

3. Passons aux entiers pairs de la forme $3q + 1$. On peut les représenter par $2^\alpha m$, m étant un entier de la forme $6l + 1$ quand α est pair, mais de la forme $6l - 1$ quand α est impair. Nous désignerons toujours par

$$\sum$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d,$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$.

Pour $\alpha = 1$, on doit avoir $m = 6l - 1$, c'est-à-dire

$$n = 2(6l - 1);$$

et, dans cette hypothèse, je trouve

$$\mathrm{N}(n = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2) = 2\sum.$$

Ainsi, pour $m = 5$, d'où $n = 10$, on doit avoir huit représentations. L'équation

$$10 = (\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 12.0^2$$

confirme ce fait.

Pour $m = 11$, on a $n = 22$; et l'on doit trouver vingt-quatre représentations. Elles sont fournies en effet par les équations que voici :

$$22 = (\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 12(\pm 1)^2,$$
$$22 = (\pm 4)^2 + 3(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 12.0^2.$$

Quand il s'agit des multiples de 4, nous avons à distinguer les deux cas de

$$n = 2^{2\gamma+2} m$$

et de

$$n = 2^{2\gamma+3} m,$$

γ pouvant se réduire à zéro. Dans le premier cas, m doit être de l'une des deux formes

$$12k + 1, \quad 12k - 5.$$

Dans le second cas, m doit être de l'une des deux formes

$$12k + 5, \quad 12k - 1.$$

Or je trouve d'une part

$$N(2^{2\gamma+2}m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2) = 2(3.2^{2\gamma+1} - 1)\sum$$

quand

$$m = 12k + 1,$$

mais

$$N(2^{2\gamma+2}m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2) = 2(3.2^{2\gamma+1} + 1)\sum$$

quand

$$m = 12k - 5;$$

et d'autre part j'obtiens

$$N(2^{2\gamma+3}m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2) = 2(3.2^{2\gamma+2} + 1)\sum$$

quand

$$m = 12k + 5,$$

mais

$$N(2^{2\gamma+3}m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2) = 2(3.2^{2\gamma+2} - 1)\sum$$

quand

$$m = 12k - 1.$$

En prenant $\gamma = 0$, on a les formules particulières que voici :

$$N(4m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2) = 10\sum$$

pour

$$m = 12k + 1;$$

mais

$$N(4m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2) = 14\sum$$

pour

$$m = 12k - 5.$$

Puis

$$N(8m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2) = 26\sum$$

pour

$$m = 12k + 5;$$

enfin

$$N(8m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2) = 22 \sum$$

pour

$$m = 12k - 1.$$

La première de ces formules particulières, en y faisant $m = 1$, donne

$$N(4 = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2) = 10,$$

ce qui est vérifié par les identités

$$4 = (\pm 2)^2 + 3.0^2 + 3.0^2 + 12.0^2,$$
$$4 = (\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 12.0^2,$$
$$4 = (\pm 1)^2 + 3.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 12.0^2.$$

Je me contenterai de ce seul exemple.