J. LIOUVILLE

Sur la forme $3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 241-242.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__241_0>

SUR LA FORME

$$3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre

$$\mathrm{N}(n = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2,$$

ne peut nous offrir aucune difficulté quand cet entier est pair. D'abord, s'il est impairement pair, l'équation

$$n = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2$$

est évidemment impossible, de façon qu'on a dans ce cas

$$\mathrm{N}(n = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2) = 0.$$

Soit ensuite n pairement pair, $n = 4q$. L'équation

$$4q = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2$$

ne peut avoir lieu qu'en prenant x pair, $x = 2x_1$; elle revient donc à celle-ci

$$q = y^2 + 3z^2 + 3t^2 + 3x_1^2.$$

En d'autres termes la valeur de

$$\mathrm{N}(4q = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2)$$

est égale à celle de

$$N[q = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)],$$

qui a été donnée dans le cahier de juillet (p. 219).

2. Pour n impair, la question n'est pas moins facile. D'abord on a évidemment

$$N(n = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2) = 0$$

quand

$$n = 4g + 1.$$

Reste le cas de

$$n = 4g + 3,$$

et celui-là sera résolu, ou du moins sera ramené à une question déjà résolue, si l'on observe que le nombre demandé

$$N(4g + 3 = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2)$$

est la moitié de

$$N(4g + 3 = 3x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2),$$

sur quoi voyez les dernières pages du cahier de juillet.