JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 229-238.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__229_0>

SUR LA FORME
$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

---

1. Étant donné un entier n, on demande le nombre des représentations de n par la forme

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2,$$

c'est-à-dire le nombre

$$N(n = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

La réponse à cette question est bien facile quand l'entier donné n est de la forme $3q + 2$; car on a évidemment

$$N(3q + 2 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 0.$$

Il est facile aussi de traiter le cas de $n = 3q$. En effet l'équation

$$3q = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2$$

exige évidemment que t soit divisible par 3. Je fais donc $t = 3u$, et en divisant par 3, je vois que notre équation équivaut à celle-ci :

$$q = x^2 + y^2 + z^2 + 12u^2.$$

En d'autres termes, le nombre demandé

$$N(3q = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2)$$

équivaut à celui-ci

$$\mathrm{N}\,(q = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2)$$

que nous avons déterminé dans le cahier de mai (p. 161), où nous le désignons plus simplement par

$$\mathrm{N}_0(q).$$

Nous écrirons en conséquence

$$\mathrm{N}\,(3q = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = \mathrm{N}_0(q).$$

2. Reste le cas de $n = 3q + 1$. Celui-là seul offre des difficultés spéciales. Néanmoins, dans ce cas même, nous réussirons à ramener la question proposée à une question déjà résolue.

Considérons d'abord les entiers impairs n de la forme $3q + 1$, c'est-à-dire soit

$$n = 6l + 1.$$

Il faut alors poser de toutes les manières possibles l'équation

$$4(6l + 1) = i^2 + 3j^2$$

où i et j sont des entiers impairs positifs, puis former la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}}\, i$$

relative aux diverses valeurs de i. Cette somme, que nous désignerons par la simple lettre τ, sera un des éléments de notre calcul. On la retranchera de la moitié du nombre des solutions de l'équation

$$6l + 1 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

dont nous nous sommes occupés plus haut, dans ce cahier même, et l'on obtiendra ainsi la valeur de

$$\mathrm{N}\,(6l + 1 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2),$$

savoir

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{N}\left[6l+1=x^2+3(y^2+z^2+t^2)\right]-\tau.$$

En désignant donc par

$$\sum$$

la somme

$$\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right)d,$$

relative aux groupes de diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$6l+1=d\delta,$$

on aura

$$\mathrm{N}(6l+1=3x^2+3y^2+3z^2+4t^2)=\sum-\tau$$

quand l est pair, c'est-à-dire quand

$$6l+1=12k+1,$$

mais

$$\mathrm{N}(6l+1=3x^2+3y^2+3z^2+4t^2)=3\sum-\tau$$

quand l est impair, c'est-à-dire quand

$$6l+1=12k-5.$$

Pour $l=0$, par exemple, il viendra

$$\mathrm{N}(1=3x^2+3y^2+3z^2+4t^2)=1-1=0,$$

ce qui est évident à priori.

Pour $l=1$, $6l+1=7$, on a

$$\sum=6;$$

les équations

$$4.7=1^2+3.3^2$$

et

$$4.7=5^2+3.1^2$$

donnent d'ailleurs

$$\tau = 6.$$

Il vient donc

$$N(7 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 3.6 - 6 = 12;$$

c'est ce que confirment les identités

$$7 = 3(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 3.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$7 = 3.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$7 = 3.0^2 + 3.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$

qui fournissent pour l'entier 7 douze représentations par la forme qui nous occupe.

5. Passons aux entiers pairs de la forme $3q+1$, et d'abord aux entiers impairement pairs,

$$2(6l-1).$$

Je ramène la recherche de

$$N[2(6l-1) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2]$$

à celle de

$$N(6l - 1 = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2).$$

La valeur de cette dernière expression a été donnée plus haut, dans ce cahier même, et il suffit de la tripler pour avoir celle que nous cherchons. En d'autres termes, on a

$$N[2(6l-1) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2] = 6\sum,$$

la simple lettre

$$\sum$$

représentant la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d,$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $6l - 1 = d\delta$.

Ainsi, par exemple, on doit avoir

$$N(10 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 24;$$

et cela est confirmé par les équations

$$10 = 3(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$10 = 3(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$10 = 3.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$

dont chacune fournit pour l'entier 10 huit représentations.

De même, on doit avoir

$$N(22 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 72;$$

c'est ce qu'on vérifiera sans peine au moyen des identités

$$22 = 3.2^2 + 3.1^2 + 3.1^2 + 4.1^2$$

et

$$22 = 3.1^2 + 3.1^2 + 3.0^2 + 4.2^2,$$

en y affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

4. Les entiers pairement pairs de la forme $3q + 1$ peuvent être représentés, sous la condition de $\alpha > 1$, par

$$2^\alpha m,$$

m étant un entier de la forme $6l + 1$ quand l'exposant α est pair, et de la forme $6l - 1$ quand l'exposant α est impair. Cela étant, pour avoir

$$N(2^\alpha m = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2),$$

on n'aura qu'à chercher

$$N[2^{\alpha-2} m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)];$$

il est évident que ces deux quantités sont égales entre elles, et la seconde a été donnée plus haut, dans ce cahier même.

D'après cela, si l'on désigne par

$$\Sigma$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$, on aura

$$\mathrm{N}(2^{2\gamma+2} m = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 2(2^{2\gamma+1} - 1)\Sigma$$

si

$$m = 12k + 1,$$

mais

$$\mathrm{N}(2^{2\gamma+2} m = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 2(2^{2\gamma+1} + 1)\Sigma$$

si

$$m = 12k - 5,$$

puis

$$\mathrm{N}(2^{2\gamma+3} m = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 2(2^{2\gamma+2} - 1)\Sigma$$

quand

$$m = 12k - 1,$$

enfin

$$\mathrm{N}(2^{2\gamma+3} m = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 2(2^{2\gamma+2} + 1)\Sigma,$$

quand

$$m = 12k + 5.$$

On admet pour γ la valeur o, comme toute autre valeur > 0.

La première de ces quatre formules donne

$$\mathrm{N}(4 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 2,$$

ce qui est exact, vu l'équation

$$4 = 3.0^2 + 3.0^2 + 3.0^2 + 4(\pm 1)^2.$$

D'après la seconde,

$$N(28 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 36,$$

ce qu'on vérifie aisément au moyen des deux identités

$$28 = 3.2^2 + 3.2^2 + 3.0^2 + 4.1^2,$$
$$28 = 3.2^2 + 3.0^2 + 3.0^2 + 4.2^2,$$

en y affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

D'après la troisième formule,

$$N(88 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 72;$$

la vérification se fait facilement au moyen des deux identités

$$88 = 3.4^2 + 3.2^2 + 3.2^2 + 4.2^2,$$
$$88 = 3.2^2 + 3.2^2 + 3.0^2 + 4.4^2.$$

Enfin la quatrième formule donne

$$N(40 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 40;$$

et les équations

$$40 = 3(\pm 2)^2 + 3(\pm 2)^2 + 3(\pm 2)^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$40 = 3(\pm 2)^2 + 3(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 4(\pm 2)^2,$$
$$40 = 3(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 3(\pm 2)^2 + 4(\pm 2)^2,$$
$$40 = 3.0^2 + 3(\pm 2)^2 + 3(\pm 2)^2 + 4(\pm 2)^2$$

confirment ce fait.

5. En traitant de la forme

$$x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2),$$

nous avons déterminé non-seulement le nombre total

$$N[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)]$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2),$$

mais encore séparément le nombre des solutions pour lesquelles $z^2 + t^2$ est un entier pair, d'où résulte par soustraction le nombre des solutions pour lesquelles $z^2 + t^2$ est un entier impair. On en conclut facilement aussi les nombres relatifs à $x^2 + 3y^2$ entier pair et à $x^2 + 3y^2$ entier impair; car $x^2 + 3y^2$ et $z^2 + t^2$ sont de même espèce (mod. 2) si l'entier donné n est pair, et d'espèce opposée si n est impair, de sorte que quand on fixe la valeur de $x^2 + 3y^2$ (mod. 2), on fixe par cela même celle de $z^2 + t^2$, et *vice versâ*.

Déterminer, comme nous venons de le faire, la valeur de

$$\mathrm{N}(n = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2),$$

c'est évidemment déterminer celle du nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

pour lesquelles x est pair, et en retranchant ce nombre du total des solutions nous en déduirons le nombre de celles pour lesquelles x est impair.

Dans l'article suivant, nous nous occuperons de la forme

$$3x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2;$$

par là nous arriverons à obtenir séparément aussi le nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

pour lesquelles x et y sont pairs à la fois, et dès lors on pourra *mutatis mutandis* appliquer à la forme

$$x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

ce que nous avons dit concernant la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$, dans nos *Remarques nouvelles* insérées au cahier de juin. En un mot, on peut trouver pour un entier quelconque n le nombre des solutions dont l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

est susceptible quand on admet des valeurs données d'espèce, relativement au module 2, pour une ou pour plusieurs des quatre indéterminées x, y, z, t.

6. Par exemple, il est intéressant de connaître l'expression très-simple du nombre des solutions que l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

comporte en n'y prenant pour x, y, z, t que des entiers impairs et positifs. Je laisse de côté le cas de $n = 3q$, qui ne nous apprendrait rien de nouveau. Dès lors n devant être à la fois $\equiv 1$ (mod. 3) et $\equiv 2$ (mod. 8) ne pourra être que de la forme $24k + 10$. Soit donc

$$n = 24k + 10,$$

et qu'il s'agisse de trouver le nombre

$$\mathfrak{N}[24k + 10 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)]$$

des solutions dont l'équation

$$24k + 10 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

jouit en n'y prenant pour x, y, z, t que des entiers impairs positifs. Or notre analyse conduit à la formule

$$\mathfrak{N}[24k + 10 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = \frac{1}{4}\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right)d,$$

où le signe sommatoire s'applique aux groupes de diviseurs conjugués d, δ de l'entier $12k + 5 = d\delta$ dont $24k + 10$ est le double.

Ainsi, on a

$$\mathfrak{N}[10 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = 1,$$

ce qui s'accorde avec l'équation

$$10 = 1^2 + 3(1^2 + 1^2 + 1^2).$$

On a ensuite

$$\mathcal{N}[34 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = 4;$$

et cela est vérifié par les équations

$$\begin{aligned}
34 &= 1^2 + 3(3^2 + 1^2 + 1^2),\\
34 &= 1^2 + 3(1^2 + 1^2 + 3^2),\\
34 &= 1^2 + 3(1^2 + 3^2 + 1^2),\\
34 &= 5^2 + 3(1^2 + 1^2 + 1^2),
\end{aligned}$$

On a de même

$$\mathcal{N}[58 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = 7,$$

résultat confirmé par les identités

$$\begin{aligned}
58 &= 1^2 + 3(3^2 + 3^2 + 1^2),\\
58 &= 1^2 + 3(3^2 + 1^2 + 3^2),\\
58 &= 1^2 + 3(1^2 + 3^2 + 3^2),\\
58 &= 5^2 + 3(3^2 + 1^2 + 1^2),\\
58 &= 5^2 + 3(1^2 + 3^2 + 1^2),\\
58 &= 5^2 + 3(1^2 + 1^2 + 3^2),\\
58 &= 7^2 + 3(1^2 + 1^2 + 1^2).
\end{aligned}$$

Je ne pousserai pas plus loin ces calculs.