JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + xy + y^2 + 3\left(z^2 + t^2\right)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 227-228.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__227_0>

SUR LA FORME

$$x^2 + xy + y^2 + 3(z^2 + t^2);$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre

$$\mathrm{N}\,[n = x^2 + xy + y^2 + 3(z^2 + t^2)]$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + xy + y^2 + 3(z^2 + t^2),$$

ne peut nous offrir à présent aucune difficulté; car il est pour ainsi dire évident que les valeurs de

$$\mathrm{N}\,[n = x^2 + xy + y^2 + 3(z^2 + t^2)]$$

et de

$$\mathrm{N}\,[2n = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2)]$$

sont égales entre elles. Or nous venons précisément de donner le moyen de calculer dans tous les cas la seconde de ces deux valeurs.

On peut aussi revenir directement à la forme

$$x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2$$

en prouvant, comme il est aisé de le faire, l'égalité des deux quantités

$$\mathrm{N}\,[n = x^2 + xy + y^2 + 3(z^2 + t^2)]$$

et

$$\mathrm{N}\,(4n = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2).$$

Tout cela est trop facile pour que je m'y arrête.

2. Je me contenterai du seul exemple de $n = 1$, pour lequel nos formules donnent

$$\mathrm{N}\,[1 = x^2 + xy + y^2 + 3(z^2 + t^2)] = 6;$$

or je trouve en effet six représentations de l'entier 1 par la forme

$$x^2 + xy + y^2 + 3(z^2 + t^2).$$

Pour ces six représentations, on a

$$z = 0, \quad t = 0,$$

et les groupes de valeurs conjuguées de x, y sont

$$x = \pm 1, \quad y = 0,$$

puis

$$x = 0, \quad y = \pm 1,$$

enfin

$$x = 1, \quad y = -1$$

et

$$x = -1, \quad y = 1.$$