# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



J. LIOUVILLE


**Sur la forme $x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 8 (1863), p. 219-224.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__219_0>

# SUR LA FORME
## $x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque $n$, on demande le nombre des représentations de $n$ par la forme

$$x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2),$$

c'est-à-dire le nombre

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)]$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2),$$

où $x$, $y$, $z$, $t$ sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs. Cette question n'offrira aucune difficulté à ceux qui feront la remarque simple que les deux quantités

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)]$$

et

$$\mathrm{N}(2n = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

sont égales entre elles. Parcourons cependant les divers cas qui peuvent se présenter.

Comme on a

$$x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2) \equiv x^2 \pmod{3},$$

il est clair que la forme proposée ne peut représenter aucun entier $\equiv 2 \pmod{3}$. En d'autres termes, on a

$$\mathrm{N}[3q + 2 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = 0.$$

Le cas de $n = 3q$ est facile aussi à traiter. En effet l'équation

$$3q = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

exige que $x$ soit multiple de 3. Je fais donc $x = 3x_1$, et en divisant par 3, j'ai

$$q = y^2 + z^2 + t^2 + 3x_1^2.$$

Il suit de là que la valeur de

$$N[3q = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)]$$

est égale à celle de

$$N(q = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2)$$

qui a été donnée dans le cahier d'avril (p. 105).

Soit

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

$m$ étant un entier impair, non divisible par 3. Si l'on a

$$\beta > 0,$$

la valeur de

$$N\left[2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)\right]$$

sera, d'après ce qu'on vient de dire,

$$\left[3^\beta + (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+1} - (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum,$$

en représentant par la simple lettre

$$\sum$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right) d$$

relative aux groupes de diviseurs conjugués $d$, $\delta$ de l'entier

$$m = d\delta.$$

**2.** Il est digne de remarque que cette expression reste exacte en y supposant $\beta = 0$. Elle conduit alors, comme il le faut, à une valeur nulle quand l'entier $n$ ou $2^\alpha m$ est de la forme $3q + 2$; et voici ce qu'elle donne quand $2^\alpha m = 3q + 1$, ce qui suppose

$$m = 6l + 1$$

si $\alpha = 2\gamma$, mais

$$m = 6l - 1$$

si $\alpha = 2\gamma + 1$.

Soit d'abord

$$m = 6l + 1,$$

ce qui répond aux cas distincts de

$$m = 12k + 1$$

et de

$$m = 12k - 5.$$

On a

$$\mathrm{N}\left[2^{2\gamma} m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)\right] = 2\left(2^{2\gamma+1} - 1\right)\sum$$

quand

$$m = 12k + 1,$$

tandis que

$$\mathrm{N}\left[2^{2\gamma} m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)\right] = 2\left(2^{2\gamma+1} + 1\right)\sum$$

quand

$$m = 12k - 5.$$

On peut prendre $\gamma = 0$ dans ces deux formules. Ainsi

$$\mathrm{N}[m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = 2\sum$$

pour $m = 12k + 1$, mais

$$\mathrm{N}[m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = 6\sum$$

pour $m = 12k - 5$.

Soit, par exemple, $m = 1$. Il nous viendra

$$N[1 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = 2,$$

ce qui s'accorde avec l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 3(0^2 + 0^2 + 0^2)$$

qui donne pour l'entier 1 deux représentations.

Soit encore $m = 7$, d'où

$$\sum = 6.$$

Nous aurons

$$N[7 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = 36.$$

Or les identités

$$\begin{aligned}
7 &= (\pm 2)^2 + 3[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2],\\
7 &= (\pm 2)^2 + 3[0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2],\\
7 &= (\pm 2)^2 + 3[0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2],\\
7 &= (\pm 1)^2 + 3[(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2],\\
7 &= (\pm 1)^2 + 3[(\pm 1)^2 + 0^2 + (\pm 1)^2],\\
7 &= (\pm 1)^2 + 3[0^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2]
\end{aligned}$$

fournissent effectivement pour l'entier 7 trente-six représentations.

3. Soit à présent

$$m = 6l - 1,$$

ce qui comprend les deux cas distincts de

$$m = 12k - 1$$

et de

$$m = 12k + 5.$$

Je trouve que l'on a

$$N[2^{2\gamma+1} m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = 2(2^{2\gamma+2} - 1)\sum$$

quand

$$m = 12k - 1,$$

tandis que

$$\mathrm{N}\left[2^{2\gamma+1}m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)\right] = 2\left(2^{2\gamma+2} + 1\right)\sum$$

quand

$$m = 12k + 5.$$

On peut prendre $\gamma = 0$ dans ces deux formules. Ainsi

$$\mathrm{N}\left[2m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)\right] = 6\sum$$

pour $m = 12k - 1$, tandis que

$$\mathrm{N}\left[2m = x^2 + 3[y^2 + z^2 + t^2)\right] = 10\sum$$

pour $m = 12k + 5$.

Soit, par exemple, $m = 5$ : il nous viendra

$$\mathrm{N}\left[10 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)\right] = 10.4 = 40.$$

Or l'entier 10 peut en effet être représenté de quarante manières par la forme

$$x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2);$$

c'est ce que prouvent les équations

$$\begin{aligned}
10 &= (\pm 1)^2 + 3[(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2],\\
10 &= (\pm 2)^2 + 3[(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2],\\
10 &= (\pm 2)^2 + 3[(\pm 1)^2 + 0^2 + (\pm 1)^2],\\
10 &= (\pm 2)^2 + 3[(0^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2].
\end{aligned}$$

Pour $m = 11$, on obtiendrait

$$\mathrm{N}\left[22 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)\right] = 6 \times 12 = 72;$$

or cela s'accorde avec les équations

$$22 = 2^2 + 3(2^2 + 1^2 + 1^2)$$

et

$$22 = 4^2 + 3(1^2 + 1^2 + 0^2),$$

qui fourniront pour l'entier 22 soixante-douze représentations si l'on a soin d'y affecter du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et d'y opérer les permutations convenables.

4. Les solutions de l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

se divisent en deux classes suivant que $z^2 + t^2$ est un entier pair ou un entier impair. Il n'est pas inutile d'avertir que l'on peut déterminer séparément le nombre des solutions de la première classe et le nombre des solutions de la seconde classe. Le total est connu; il me suffira donc de dire que le nombre des solutions de la première classe ($z^2 + t^2$ entier pair) est égal à

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2]:$$

la démonstration est facile. Or la valeur de

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2]$$

a été donnée plus haut, dans ce cahier même.