JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 205-208.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__205_0>

SUR LA FORME

$x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande le nombre

$$N(n = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2)$$

des représentations de n par la forme

$$x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2,$$

c'est-à-dire du nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers quelconques.

Cette question n'offre aucune difficulté quand n est un entier impair $4g + 3$ ou un entier impairement pair $2(2g + 1)$; car il est évident que dans ces deux cas on a

$$N(n = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2) = 0.$$

Le cas de n pairement pair, $n = 4g$, est facile aussi à traiter, car l'équation

$$4g = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2$$

exigeant que x soit pair, on n'a qu'à faire $x = 2u$ pour la ramener à celle-ci

$$g = u^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2,$$

qui a été discutée plus haut, dans ce cahier même.

2. Il ne reste plus que le cas de

$$n = 4g + 1.$$

Celui-là a ses difficultés propres. Néanmoins, dans ce cas même, nous arriverons au but en employant les fonctions

$$N(n),\ N_0(n)$$

qui représentent respectivement les valeurs connues de

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2)$$

et de

$$N_0(n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2).$$

D'abord on posera l'équation

$$4(4g+1) = i^2 + 3j^2,$$

où i et j sont des entiers impairs, et l'on formera la somme

$$\sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j,$$

que nous désignons, pour abréger, par σ. Ensuite on aura

$$N(4g + 1 = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2) = \frac{1}{6} N_0(4g+1) + (-1)^g \sigma,$$

en employant la fonction $N_0(n)$, ou bien

$$N(4g + 1 = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2) = \frac{1}{12} N(4g+1) + \left[\frac{1}{2} + (-1)^g\right] \sigma,$$

en employant la fonction $N(n)$.

3. Appliquons à quelques exemples l'expression

$$\frac{1}{6} N_0(4g+1) + (-1)^g \sigma$$

du nombre demandé

$$N(4g+1=x^2+4y^2+12z^2+16t^2).$$

Soit d'abord $g=0$, d'où

$$4g+1=1;$$

on a ici $\sigma=1$, $N_0(1)=6$; donc

$$N(1=x^2+4y^2+12z^2+16t^2)=2,$$

ce qui est exact.

Soit ensuite $g=1$, d'où

$$4g+1=5.$$

On a cette fois $\sigma=0$, $N_0(5)=24$; donc

$$N(5=x^2+4y^2+12z^2+16t^2)=4,$$

ce qui est exact aussi.

Prenons à présent $g=2$, d'où

$$4g+1=9.$$

On a pour ce cas $\sigma=-3$, $N_0(9)=30$; donc

$$N(9=x^2+4y^2+12z^2+16t^2)=2,$$

ce qui s'accorde avec l'équation

$$9=(\pm 3)^2+4.0^2+12.0^2+16.0^2.$$

Soit encore $g=3$, d'où

$$4g+1=13.$$

On a dans ce cas $\sigma=-2$, $N_0(13)=36$; donc

$$N(13=x^2+4y^2+12z^2+16t^2)=8.$$

Les équations

$$13 = (\pm 3)^2 + 4(\pm 1)^2 + 12.0^2 + 16.0^2$$

et

$$13 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 12(\pm 1)^2 + 16.0^2$$

confirment ce fait.

Pour $g = 4$, c'est-à-dire

$$4g + 1 = 17,$$

on a

$$\sigma = 0$$

et

$$N_0(17) = 96;$$

donc

$$N(17 = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2) = 16.$$

Cela est confirmé par les identités

$$17 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 12.0^2 + 16(\pm 1)^2,$$
$$17 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 12(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$17 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 2)^2 + 12.0^2 + 16.0^2.$$

Nous ne pousserons pas plus loin ces calculs; mais nous ferons observer que la forme qui nous occupe, et qui peut s'écrire

$$x^2 + (2y)^2 + (4t)^2 + 3(2z)^2,$$

dérive de la forme

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 3T^2,$$

en n'y admettant pour Y et T que des entiers pairs et pour Z que des entiers pairement pairs. En exigeant pour Z une valeur pairement paire, nous sortons du cercle des questions traitées ci-dessus.