JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 189-192.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__189_0>

SUR LA FORME

$$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2;$$

Par M. J. LIOUVILLE.

1. On demande le nombre

$$N(n = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2)$$

des représentations de n par la forme

$$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2,$$

c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation

$$n = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Cette question ne peut nous offrir aucune difficulté quand il s'agit d'un entier pair $n = 2g$. En effet l'équation

$$2g = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2$$

exige que z soit pair. Soit donc $z = 2z_1$, d'où

$$2g = 2x^2 + 2y^2 + 12z_1^2 + 4t^2;$$

en divisant par 2 et changeant l'ordre des deux derniers termes, notre équation reviendra à celle-ci

$$g = x^2 + y^2 + 2t^2 + 6z_1^2.$$

Or cette dernière équation a été discutée dans le cahier d'avril (p. 124).

2. Désormais donc nous supposerons l'entier n impair, et en employant, comme dans l'article précédent, les expressions

$$\mathrm{N}(n)$$

et

$$\mathrm{N}_0(n)$$

introduites dans les cahiers d'avril et de mai pour représenter les valeurs respectives de

$$\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2)$$

et de

$$\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2),$$

nous obtiendrons facilement la solution de notre problème.

Soit d'abord

$$n = 4g + 1.$$

On démontrera aisément que

$$\mathrm{N}(4g + 1 = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2) = \tfrac{1}{3}[\mathrm{N}(4g + 1) - \mathrm{N}_0(4g + 1)].$$

Ainsi, par exemple, ayant

$$\mathrm{N}(5) = 48$$

et

$$\mathrm{N}_0(5) = 24,$$

on en conclura que

$$\mathrm{N}(5 = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 8,$$

ce qui s'accorde avec les équations

$$5 = 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4.0^2$$

et

$$5 = 2.0^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$

qui fournissent pour l'entier 5 huit représentations sous la forme voulue.

De même ayant

$$N(9) = 78$$

et

$$N_0(9) = 30,$$

on est assuré que

$$N(9 = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 16;$$

et c'est ce que confirment les identités

$$9 = 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$9 = 2.0^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$

qui fournissent pour l'entier 9 seize représentations.

3. Soit à présent

$$n = 4g + 3.$$

On prouvera sans peine que

$$N(4g + 3 = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2) = N(4g + 3) - N_0(4g + 3).$$

La question proposée sera ainsi complétement résolue.

Par exemple, ayant

$$N(3) = 10$$

et

$$N_0(3) = 8,$$

on en conclura que

$$N(3 = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 2,$$

ce qui est vérifié par l'équation

$$3 = 2.0^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4.0^2.$$

De même, comme on a

$$N(7) = 12$$

et

$$N_0(7) = 0,$$

on peut être assuré que

$$N(7 = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 12;$$

les identités

$$7 = 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 4.0^2$$

et

$$7 = 2.0^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2$$

confirment ce fait.

Ayant

$$N(11) = 48$$

et

$$N_0(11) = 24,$$

on en conclura semblablement

$$N(11 = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 24,$$

résultat facile à vérifier. Mais en voilà assez sur ce sujet.

Il n'est pas nécessaire d'ajouter que l'on n'aura qu'à remplacer nos fonctions auxiliaires par leurs valeurs connues pour arriver dans chaque cas à une formule explicite donnant directement la valeur demandée de

$$N(n = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2).$$