JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 185-188.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__185_0>

SUR LA FORME
$x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre

$$N(n = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

est très-simple quand on fait usage des fonctions

$$N(n), \quad N'(n)$$

introduites dans le cahier d'avril à l'occasion de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

et de la fonction

$$N_0(n)$$

dont on a donné la valeur dans le cahier de mai en s'occupant de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2.$$

2. Considérant d'abord un entier impair $4g + 1$, on prouve sans peine que

$$N(4g + 1 = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2) = \frac{1}{3} N_0(4g + 1).$$

Ainsi, ayant reconnu que

$$N_0(9) = 30,$$

on est en droit d'affirmer que

$$N(9 = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2) = 10,$$

et cela est confirmé par les équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 3.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 3.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$

dont la première fournit deux représentations et la seconde huit représentations de l'entier 9 sous la forme voulue.

De même, ayant trouvé

$$N_0(13) = 36,$$

on en conclura

$$N(13 = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2) = 12;$$

ce qui s'accorde avec les équations

$$13 = (\pm 1)^2 + 3(\pm 2)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$13 = (\pm 3)^2 + 3.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$13 = (\pm 3)^2 + 3.0^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$

dont chacune fournit quatre représentations.

5. Pour un entier impair $4g + 3$, on établit aisément l'équation

$$N(4g + 3 = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2) = N(4g + 3) - N_0(4g + 3).$$

Ainsi, ayant

$$N(3) = 10$$

et

$$N_0(3) = 8,$$

on devra avoir

$$N(3 = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2) = 2.$$

C'est l'équation

$$3 = 0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2$$

qui fournit ici les deux représentations annoncées.

De même, puisque l'on a

$$N(7) = 12,$$

et

$$N_0(7) = 0,$$

on en conclura

$$N(7 = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2) = 12;$$

ce qui s'accorde avec les équations

$$\begin{aligned}
7 &= (\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 4\,0^2 + 4.0^2,\\
7 &= 0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,\\
7 &= 0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2,
\end{aligned}$$

qui donnent pour l'entier 7 douze représentations.

4. Passons aux entiers pairs; et d'abord observons que l'équation

$$2(2g+1) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2$$

étant évidemment impossible, on a

$$N[2(2g+1) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2] = 0.$$

Nous n'avons donc à nous occuper que des multiples de 4, $n = 4g$. Or, pour eux, on prouve facilement que

$$N(4g = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2) = N(g) + 2N'(g).$$

Si donc on pose

$$g = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant un entier impair, non divisible par 3, et l'exposant α pouvant se réduire à zéro, on tirera des formules du cahier d'avril cette conclusion explicite que la valeur de

$$N(4.2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2)$$

est égale à

$$\left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+2} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum,$$

où

$$\sum$$

désigne, on s'en souvient, la somme

$$\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right)d,$$

relative aux groupes de diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$.

Par exemple, on a

$$N(4 = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2) = 10;$$

et, en effet, les équations

$$\begin{aligned}
4 &= (\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,\\
4 &= (\pm 2)^2 + 3.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,\\
4 &= 0^2 + 3.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,\\
4 &= 0^2 + 3.0^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2
\end{aligned}$$

fournissent pour l'entier 4 dix représentations sous la forme voulue.

On trouve aussi

$$N(12 = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2) = 30,$$

résultat aisé à vérifier. Mais je ne veux pas pousser plus loin ces calculs.