JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 182-184.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__182_0>

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande une expression simple du nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2,$$

c'est-à-dire une expression simple du nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers quelconques positifs, nuls ou négatifs.

Comme cette équation peut s'écrire

$$n = x^2 + y^2 + (2t)^2 + 3z^2,$$

on comprend qu'elle se rattache à l'équation

$$n = X^2 + Y^2 + Z^2 + 3T^2,$$

pour laquelle le nombre

$$N(n)$$

des solutions a été donné dans le cahier d'avril. Mais, ici, nous n'admettons plus pour Z que des valeurs paires; et cela change beaucoup l'état de la question.

2. Soit d'abord n impair, et posons de toutes les manières possibles

l'équation

$$4n = i^2 + 3j^2,$$

en y prenant pour i et j des entiers impairs positifs. La somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

relative aux diverses valeurs de i, et que nous désignerons par la simple lettre

$$\tau,$$

jouera ici un rôle utile. Nous la préférons cette fois à la fonction σ, relative à j, pour n'avoir pas à distinguer les deux cas de $n \equiv 1$ et de $n \equiv 3$ (mod. 4). Je trouve en effet que, dans le cas de n impair quelconque,

$$\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2) = \frac{1}{2}\mathrm{N}(n) + \tau.$$

Si donc on fait, comme dans le cahier d'avril, $n = 3^\beta m$, m impair premier à 3, on aura, suivant les notations employées dans ce cahier, pour le nombre demandé

$$\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2),$$

l'expression explicite

$$\frac{1}{2}\left[3^{\beta+1} - (-1)^\beta \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2 + (-1)^{\beta + \frac{m-1}{2}}\right] \sum + \tau.$$

3. Qu'il s'agisse maintenant d'un entier impairement pair

$$2.3^\beta m.$$

Je trouve qu'alors il y a égalité entre

$$\mathrm{N}(2.3^\beta m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4z^2)$$

et

$$\mathrm{N}(3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2).$$

En vertu d'une formule donnée aussi dans le cahier d'avril, on a donc

$$\mathrm{N}\,(2.3^\beta m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2) = \left[3^{\beta+1} + (-1)^\beta\left(\frac{m}{3}\right)\right]\sum.$$

Pour un entier pairement pair,

$$n = 2^\alpha 3^\beta m, \quad \alpha > 1,$$

il faut encore recourir au cahier d'avril, car on trouve que, dans ce cas,

$$\mathrm{N}\,(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2) = \frac{1}{3}\mathrm{N}\,(2^{\alpha-2}3^\beta m) + \frac{2}{3}\mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m).$$

Dans le cas de

$$\alpha > 1,$$

la valeur explicite de

$$\mathrm{N}\,(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2)$$

est donc

$$\left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[3.2^{\alpha-1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum.$$