JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 179-181.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__179_0>

SUR LA FORME
$3x^2+4y^2+4z^2+4t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre

$$N(n=3x^2+4y^2+4z^2+4t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$3x^2+4y^2+4z^2+4t^2,$$

se rattache aussi aux fonctions numériques

$$N(n),\quad N_0(n)$$

que nous avons employées dans l'article précédent. Mais d'abord il faut observer que l'on a évidemment

$$N(n=3x^2+4y^2+4z^2+4t^2)=0$$

quand n est un entier impair $4g+1$, et quand n est impairement pair, c'est-à-dire quand

$$n=2(2g+1).$$

Il n'y a donc véritablement que deux cas à traiter, celui de n impair $4g+3$ et celui de n multiple de 4.

2. Soit d'abord n multiple de 4. Posons alors

$$n=4.2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant un entier impair non divisible par 3, et les exposants α, β pouvant se réduire à zéro. L'équation

$$4.2^\alpha 3^\beta m = 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2$$

exige que x soit pair. Je fais donc $x = 2u$, et en divisant par 4, j'obtiens

$$2^\alpha 3^\beta m = y^2 + z^2 + t^2 + 3u^2,$$

ce qui nous ramène à la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$ dont nous nous sommes occupés dans le cahier d'avril : nous avons donné dans ce cahier la valeur du nombre

$$\mathrm{N}\,(2^\alpha 3^\beta m)$$

des représentations de l'entier

$$2^\alpha 3^\beta m$$

par cette forme. Or il suit de ce qui précède que

$$\mathrm{N}\,(4.2^\alpha 3^\beta m = 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2) = \mathrm{N}\,(2^\alpha 3^\beta m).$$

La valeur demandée de

$$\mathrm{N}\,(n = 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2)$$

sera donc maintenant facile à calculer pour tout entier n multiple de 4.

5. Soit enfin n impair $4g + 3$. On verra dans ce cas très-facilement que

$$\mathrm{N}\,(4g + 3 = 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2) = \mathrm{N}\,(4g + 3) - \mathrm{N}_0(4g + 3).$$

La fonction

$$\mathrm{N}_0(4g + 3),$$

qui exprime le nombre des solutions de l'équation

$$4g + 3 = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2,$$

a été introduite dans le cahier de mai, et nous savons que

$$N_0(4g+3) = \frac{1}{2}N(4g+3) + 3\sigma,$$

σ désignant la somme

$$\sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j$$

qui se rapporte aux valeurs que j peut prendre dans l'équation

$$4(4g+3) = i^2 + 3j^2,$$

où i et j sont des entiers impairs positifs. On peut donc encore écrire

$$N(4g+3 = 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2) = \frac{1}{2}N(4g+3) - 3\sigma.$$

Qu'il s'agisse, par exemple, de l'entier 3. On a $N(3) = 10$, et l'équation

$$12 = 3^2 + 3.1^2$$

donne $\sigma = 1$. Donc

$$N(3 = 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2) = \frac{1}{2}\cdot 10 - 3 = 2,$$

ce qui est exact.

Pour l'entier 7, on a $N(7) = 12$, et les équations

$$4.7 = 1^2 + 3.3^2, \quad 4.7 = 5^2 + 3.1^2$$

donnent $\sigma = -3 + 1 = -2$. Donc

$$N(7 = 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2) = \frac{1}{2}\cdot 12 + 6 = 12;$$

or, en effet, l'équation

$$7 = 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2$$

a douze solutions qui résultent de l'identité

$$7 = 3(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2$$

en y permutant les trois derniers carrés.