JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 177-178.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__177_0>

SUR LA FORME
$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre

$$N(n = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2,$$

ne peut offrir aucune difficulté à ceux qui se souviennent de ce que nous avons dit concernant les deux formes

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

et

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2.$$

On sait que, pour abréger, nous écrivons simplement

$$N(n)$$

au lieu de

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2)$$

et

$$N_0(n)$$

au lieu de

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2).$$

Indiquons maintenant comment les valeurs de $N(n)$ et de $N_0(n)$ étant connues pour tout entier n, on en conclut

$$N(n = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2).$$

2. Mettons d'abord de côté le cas de n impair $4g+3$, et celui de n impairement pair, pour lesquels on a évidemment

$$N(n = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2) = 0.$$

Restent les deux cas de n impair $4g+1$, et de n multiple de 4, c'est-à-dire de $n = 4g$.

Or on prouve facilement que

$$N(4g+1 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2) = \frac{1}{3} N_0(4g+1)$$

et que

$$N(4g = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2) = N(g).$$

Ainsi, par exemple, ayant trouvé

$$N_0(13) = 36,$$

on est autorisé à affirmer que

$$N(13 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2) = 12;$$

et cette valeur s'accorde effectivement avec les identités

$$\begin{aligned}
13 &= (\pm 3)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 12.0^2,\\
13 &= (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 12.0^2,\\
13 &= (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 12(\pm 1)^2,
\end{aligned}$$

qui fournissent douze représentations de l'entier 13 par la forme

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2.$$