JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 161-168.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__161_0>

SUR LA FORME
$x^2+y^2+z^2+12t^2$;
PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La forme

$$x^2+y^2+z^2+12t^2,$$

dont nous voulons nous occuper ici, se rattache à la forme

$$x^2+y^2+z^2+3t^2$$

que nous avons considérée dans le cahier d'avril.

Pour un entier donné quelconque n (ou $2^\alpha 3^\beta m$, m impair premier à 3) nous avons trouvé le nombre

$$\mathrm{N}(n)$$

des représentations de n, par la forme $x^2+y^2+z^2+3t^2$, égal à

$$\left[3^{\beta+1}-(-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+1}+(-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum,$$

en désignant par la simple lettre

$$\sum$$

la somme

$$\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right)d,$$

ou, si l'on veut,

$$\sum\left(\frac{3}{\delta}\right)d,$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m=d\delta$. De plus, nous avons distingué les représentations où $z^2 + 3t^2$ est un entier impair de celles où $z^2 + 3t^2$ est un entier pair, et en appelant

$$N'(n)$$

le nombre des premières, nous avons obtenu

$$N'(n) = 2^\alpha \left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\sum.$$

Mais on peut aussi vouloir considérer séparément les représentations de n où la valeur de t est impaire et celles où la valeur de t est paire. Soit donc

$$N_0(n)$$

le nombre de celles-ci, c'est-à-dire soit $N_0(n)$ le nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

pour lesquelles t est un entier pair. Il est clair que ce nombre

$$N_0(n)$$

sera précisément le nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2,$$

en y prenant pour x, y, z, t des entiers quelconques. Ainsi $N_0(n)$ est le nombre des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2,$$

dont nous allons parler aujourd'hui. Notre objet actuel est en effet de donner des règles simples pour calculer $N_0(n)$.

2. La valeur de $N_0(n)$ est bien facile à trouver quand l'entier n est divisible par 4; car on voit aisément que, pour $\alpha > 1$, l'on a

$$N_0(2^\alpha 3^\beta m) = N(2^{\alpha-2} 3^\beta m).$$

Dans l'hypothèse de $\alpha > 1$, la valeur de

$$N_0(2^\alpha 3^\beta m)$$

est donc

$$\left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha-1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum.$$

Pour un entier impairement pair

$$2.3^\beta m,$$

il n'est pas difficile non plus d'arriver à l'équation

$$N_0(2.3^\beta m) = \frac{3}{2}N'(2.3^\beta m),$$

en sorte que

$$N_0(2.3^\beta m) = 3\left[3^{\beta+1} + (-1)^\beta\left(\frac{m}{3}\right)\right]\sum.$$

Mais le cas d'un entier impair n (ou $3^\beta m$) exige une étude plus délicate et l'introduction d'une fonction numérique nouvelle.

5. Soit donc n (ou $3^\beta m$) un entier impair. Posons de toutes les manières possibles l'équation

$$4n = i^2 + 3j^2,$$

i et j désignant des entiers impairs positifs; puis formons la somme

$$\sum(-1)^{\frac{j-1}{2}} j,$$

relative à toutes les valeurs de j. Cette somme, que nous représenterons par la simple lettre

$$\sigma,$$

constitue la fonction numérique nouvelle dont nous avons à tenir compte.

Je trouve en effet que l'on a, pour tout entier impair n,

$$N_0(n) = \frac{1}{2}N(n) + 3\sigma.$$

Je n'ai pas besoin de rappeler que pour $n = 3^\beta m$, la valeur de $\mathrm{N}(n)$ est

$$\left[3^{\beta+1} - (-1)^\beta \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2 + (-1)^{\beta + \frac{m-1}{2}}\right]\sum.$$

On remarquera que σ n'est pas fonction de m seulement, mais de m et de β. Il est bon aussi de faire observer que la valeur de σ est tantôt positive, tantôt négative; j'ajoute que souvent on a $\sigma = 0$, et qu'en particulier cela arrive toujours quand m est $\equiv 5 \pmod 6$, puisque l'équation

$$4n = i^2 + 3j^2$$

n'est possible qu'autant que les facteurs premiers qui entrent dans la composition de m avec un exposant impair sont de la forme $6l + 1$.

4. Ajoutons quelques exemples; et d'abord soit $n = 5$, d'où $\sigma = 0$, puis

$$\sum = 4.$$

La formule

$$\mathrm{N}_0(n) = \frac{1}{2}\mathrm{N}(n) + 3\sigma$$

du nº **3** donnera

$$\mathrm{N}_0(5) = 24,$$

et cela s'accorde avec l'équation

$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 12.0^2$$

qui fournit vingt-quatre représentations en y permutant de toutes les manières possibles les trois carrés

$$(\pm 2)^2,\ (\pm 1)^2,\ 0^2.$$

Soit en second lieu

$$n = 7,$$

d'où

$$4n = 1^2 + 3.3^2$$

et

$$4n = 5^2 + 3.1^2,$$

par conséquent

$$\sigma = -2.$$

Comme d'un autre côté

$$\sum = 6,$$

notre formule donnera

$$N_0(7) = 0,$$

et en effet l'équation

$$7 = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2$$

est impossible.

Soit encore

$$n = 9 = 3^2.1,$$

d'où

$$4n = 3^2 + 3.3^2,$$

et par conséquent

$$\sigma = -3.$$

Comme d'ailleurs on a ici $m = 1$, et par suite

$$\sum = 1,$$

il viendra

$$N_0(9) = 30.$$

Or l'entier 9 a effectivement trente représentations, qui sont fournies par les deux identités

$$9 = 3^2 + 0^2 + 0^2 + 12.0^2$$

et

$$9 = 2^2 + 2^2 + 1^2 + 12.0^2$$

en y affectant du double signe les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

Enfin soit

$$n = 13,$$

d'où

$$4n = 5^2 + 3.3^2$$

et

$$4n = 7^2 + 3.1^2,$$

partant

$$\sigma = -2.$$

On a cette fois

$$\sum = 14$$

et

$$N_0(13) = 36.$$

Or l'entier 13 a effectivement trente-six représentations, faciles à déduire des deux identités

$$13 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 12.1^2$$

et

$$13 = 3^2 + 2^2 + 0^2 + 12.0^2.$$

5. Prenons maintenant des entiers pairs, et par conséquent faisons usage des formules du n° **2**.

Pour $n = 12$, c'est-à-dire pour

$$n = 2^2.3.1,$$

on a $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $m = 1$, partant

$$\sum = 1.$$

La formule à employer est celle qui concerne les multiples de 4. On en conclut

$$N_0(12) = 10;$$

or cela s'accorde avec les deux équations

$$12 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 12.0^2$$

et

$$12 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 12.1^2$$

qui fournissent bien dix représentations.

Soit à présent $n = 10 = 2.5$. Il s'ensuivra $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $m = 5$, et

$$\sum = 4.$$

La formule à employer est celle qui concerne les entiers impairement pairs. Elle donne

$$N_0(10) = 24.$$

Or on trouve effectivement vingt-quatre représentations pour l'entier 10, au moyen de l'identité

$$10 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 12.0^2,$$

en y permutant de toutes les manières possibles les trois carrés

$$(\pm 3)^2, \ (\pm 1)^2, \ 0^2.$$

Considérons encore l'entier impairement pair $n = 14$, d'où

$$n = 2.7,$$

et partant

$$\beta = 0, \quad m = 7,$$

puis

$$\sum = 6.$$

Il nous viendra

$$N_0(14) = 72,$$

et l'on vérifiera sans peine l'exactitude de ce résultat au moyen des deux identités

$$14 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 12.0^2$$

et

$$14 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 12.1^2,$$

qui fournissent pour l'entier 14 soixante-douze représentations.

6. Rapprochons, en terminant, la fonction numérique

$$\sigma$$

de quelques fonctions du même genre, qui ont avec celle-là un lien intime. On se rappelle que n désignant un entier impair donné, nous posons de toutes les manières possibles l'équation

$$4n = i^2 + 3j^2,$$

les entiers i et j étant impairs positifs, après quoi

$$\sigma = \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j.$$

Or on peut aussi considérer la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i;$$

et je trouve que l'on a

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i = \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j$$

quand $n = 4g + 1$, tandis que

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i = -3 \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j$$

quand $n = 4g + 3$.

Maintenant, à côté des décompositions de $4n$, prenons celles de n sous la forme $r^2 + 3s^2$; et nous obtiendrons un autre résultat curieux.

Soit d'abord

$$n = 4g + 1, \quad \text{et} \quad n = r^2 + 3s^2,$$

l'entier r étant impair positif, tandis que s est indifféremment positif, nul ou négatif. Je trouve, pour ce cas, l'équation

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r = (-1)^g \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j.$$

Soit, en second lieu,

$$n = 4g + 3, \quad \text{et} \quad n = r^2 + 3s^2,$$

l'entier s étant cette fois impair et positif, tandis que l'entier r est indifféremment positif, nul ou négatif. Je trouve, pour ce cas, l'équation

$$\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} s = (-1)^g \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j.$$

On voit donc que d'autres fonctions numériques auraient pu remplacer la fonction σ dans nos formules. Peut-être trouvera-t-on qu'en employant n au lieu de $4n$ les calculs seraient plus simples. J'ai préféré la fonction σ afin de n'avoir qu'une seule formule à écrire pour exprimer $N_0(n)$ dans le cas de n impair.