JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

F. LUCAS

Nouvelle théorie des diamètres

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 145-160.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__145_0>

NOUVELLE THÉORIE DES DIAMÈTRES;

Par M. F. LUCAS,
Ingénieur des Ponts et Chaussées à Nice.

§ Ier. — *Points centraux d'un système de points en ligne droite.*

1. *Des points centraux d'un système de points en ligne droite.* — Considérons sur une droite un système de points fixes

$$A_1,\ A_2,\ldots,\ A_p$$

et un point mobile V. Le produit de segments

$$VA_1 \times VA_2 \times \ldots \times VA_p$$

varie, quand V se déplace, et devient maximum pour certaines positions du point mobile. Nous appellerons ces positions les *points centraux* du système proposé.

Prenons sur la droite une origine d'abscisses O et désignons par

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_p$$

les abscisses des points donnés; par x l'abscisse du point mobile V. Nous aurons évidemment

$$A_1V \times A_2V \times \ldots \times A_pV = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_p) = f(x),$$

$f(x)$ désignant une fonction algébrique entière, du degré p, qui s'annule pour les valeurs a_1, $a_2,\ldots$, a_p de la variable x, et dans laquelle le terme en x^p a pour coefficient l'unité.

Les abscisses des points centraux cherchés sont les racines de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

et par conséquent les points centraux d'un système de p points en ligne droite forment un groupe de $(p-1)$ points.

2. *Cas où un ou plusieurs des points donnés vont à l'infini.* — Mettant à part un des points donnés, A_1, par exemple, nous poserons

$$f(x) = (x - a_1)\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant du degré $(p-1)$.

Nous aurons alors

$$f'(x) = (x - a_1)\varphi'(x) + \varphi(x) = (x - a_1)\left[\varphi'(x) + \frac{\varphi(x)}{x - a_1}\right].$$

Par conséquent, si a_1 augmente indéfiniment, l'équation $f'(x) = 0$ tendra à prendre la forme

$$(x - a_1)\varphi'(x) = 0$$

et à se décomposer en ces deux autres

$$\left\{\begin{aligned} (x - a_1) &= 0, \\ \varphi'(x) &= 0. \end{aligned}\right.$$

Donc :

Si l'un des points donnés est à l'infini, il fait partie des points centraux du système, et les autres points centraux sont précisément ceux relatifs au système qu'on obtient en supprimant le point à l'infini parmi les points donnés.

De même, si nous mettons à part les points $A_1, A_2, \ldots, A_q$, nous poserons

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_q)\psi(x),$$

$\psi(x)$ désignant une fonction du degré $p - q$, et nous aurons

$$f'(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_q)\left[\psi'(x) + \sum_1^r \frac{\psi(x)}{(x - a_r)}\right],$$

la sommation par valeurs entières se rapportant à l'indice r.

Par conséquent, lorsque $a_1, a_2, \ldots, a_q$ augmentent indéfiniment, l'équation $f'(x) = 0$ tend à se décomposer dans les suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} x = a_1, \\ x = a_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x = a_q, \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \psi'(x) = 0.$$

Donc :

Si q des points donnés sont à l'infini, ils font partie des points centraux du système, et les autres points centraux sont précisément ceux relatifs au système qu'on obtient en supprimant, parmi les points donnés, les points à l'infini.

3. *Cas où plusieurs des points donnés coïncident.* — Supposons maintenant que les points $A_1, A_2, \ldots, A_q$ coïncident sans aller à l'infini, et désignons par α leur abscisse commune. Nous poserons

$$f(x) = (x - \alpha)^q \varphi(x),$$

d'où nous déduirons

$$f'(x) = (x - \alpha)^{q-1} [q\varphi(x) + (x - \alpha)\varphi'(x)];$$

α sera donc $(q - 1)$ fois racine de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

et par conséquent :

Si q des points donnés coïncident en un seul, ce point appartient $(q - 1)$ fois aux points centraux du système.

4. *Propriété projective.* — Projetons sur une droite quelconque de l'espace les divers points de la droite donnée, en faisant usage de plans parallèles entre eux.

Désignons par x' l'abscisse de la projection du point dont l'abscisse est x, la nouvelle origine des abscisses étant la projection de l'ancienne origine.

Nous aurons

$$x = kx',$$

k désignant une constante qui dépend de la direction des plans projetants.

Conséquemment les abscisses des projections des points A_1, A_2, etc., seront les racines de l'équation

$$F(x') = f(kx) = 0,$$

et les abscisses des projections des points centraux seront les racines de l'équation

$$kf'(x) = F'(x') = 0.$$

Par conséquent :

La figure formée par un système de points en ligne droite et par leurs points centraux est douée des propriétés projectives.

C'est-à-dire que les projections des points centraux du système donné sont les points centraux du système projeté.

§ II. — *Diamètres, pôles de l'infini et courbes centrales dans les courbes géométriques.*

5. *Définition des diamètres.* — Étant donnée une courbe du degré p, si l'on mène les sécantes parallèles à une direction donnée et si l'on prend sur chacune de ces droites les points centraux du système de ses intersections avec la courbe, on formera le *diamètre* de la direction considérée.

Soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe donnée, et désignons par m le coefficient angulaire de la direction des sécantes; ces droites seront représentées par l'équation

$$y = mx + \lambda$$

dans laquelle λ est un paramètre arbitraire.

Donnons à λ une valeur quelconque mais fixe; la sécante correspondante rencontrera la courbe en des points que nous projetterons sur l'axe des x. Les abscisses de ces projections seront les racines de l'équation

$$f(x, mx + \lambda) = 0,$$

et les abscisses des points centraux du système de points ainsi formé seront les racines de l'équation

$$f'_x\,(x,\, mx+\lambda)+mf'_{mx+\lambda}(x,\, mx+\lambda)=0.$$

Ces points centraux sont donc les projections, sur l'axe des x, des points que déterminent les deux équations simultanées

$$\begin{cases} y = mx+\lambda \\ f'_x\,(x,\, y)+mf'_y\,(x.\, y)=0\,; \end{cases}$$

et par conséquent, en vertu de ce qui a été dit au n° **4**, ces deux équations représentent les *points centraux* du système des points d'intersection de la sécante et de la courbe.

Or la dernière de ces équations est indépendante du paramètre λ; elle est donc l'équation même du diamètre cherché.

Par conséquent le diamètre de la direction dont le coefficient angulaire est m est une courbe du degré $(p-1)$ ayant pour équation

$$f'_x+mf'_y=0.$$

6. *Pôles de l'infini.* — Si l'on donne à m toutes les valeurs possibles, on obtiendra toute la série des diamètres. On reconnaît sans peine que ces courbes passent toutes par les points, au nombre de $(p-1)^2$, dont les coordonnées satisfont aux équations simultanées

$$\begin{cases} f'_x=0, \\ f'_y=0. \end{cases}$$

Par conséquent :

Les diamètres pivotent un groupe de $(p-1)^2$ *points fixes du plan.*

Nous appellerons ces points remarquables les *pôles de l'infini* de la courbe donnée. Cette dénomination se justifie par certaines considérations auxquelles nous ne pourrions donner place dans ce Mémoire, qu'en sortant du cadre restreint que nous nous sommes imposé.

On reconnaît aisément que si la courbe donnée possède des points singuliers, ces points font nécessairement partie des pôles de l'infini, et que si, le degré de la courbe étant supposé pair, cette courbe admet un centre, ce point fait aussi partie du groupe dont il s'agit.

7. *Courbe centrale.* — Le diamètre de la direction dont le coefficient angulaire est m est une courbe qui admet elle-même des pôles de l'infini, au nombre de $(p-2)^2$, déterminés par les équations simultanées

$$\begin{cases} f''_{x^2} + m f''_{x,y} = 0, \\ f''_{x,y} + m f''_{y^2} = 0. \end{cases}$$

Éliminant m entre ces deux équations, nous aurons le lieu géométrique des pôles de l'infini dans les divers diamètres. Cette courbe, que nous appelons la *courbe centrale*, a pour équation

$$f''_{x^2} f''_{y^2} = (f''_{x,y})^2;$$

elle est algébrique et du degré $2(p-1)$.

Lorsque $p=3$, les diamètres sont des coniques dont les centres sont les pôles de l'infini, et la courbe centrale est elle-même une conique.

8. *Propriétés des diamètres.* — Considérons une direction quelconque et menons à la courbe une tangente parallèle à cette direction.

Cette droite, considérée comme sécante, présente un point d'intersection double, lequel, en vertu de ce qui a été dit au n° **3**, appartient comme point simple aux points centraux du système des intersections.

Par conséquent :

Le diamètre d'une direction quelconque rencontre la courbe donnée aux points où les tangentes sont parallèles à cette direction.

Considérons maintenant une asymptote de la courbe. Sur cette droite considérée comme sécante, le point à l'infini figure comme point d'intersection double, et par conséquent, d'après ce que nous avons vu au n° **2**, il fait deux fois partie du système des points centraux des intersections.

Par conséquent :

Le diamètre de la direction d'une asymptote est asymptote à cette droite.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur cette théorie des diamètres, bien qu'elle puisse se prêter à de plus amples développements, surtout si l'on considère des diamètres de différents ordres ou diamètres dans les diamètres. Mais pour donner un exemple du parti que l'on peut tirer de cette théorie dans l'étude des courbes géométriques, nous allons exposer la classification des courbes du troisième degré.

§ III. — *Classification des courbes du troisième degré.*

9. *Division analytique en trois familles.* — L'équation générale des courbes du troisième degré peut être mise sous la forme

$$f(x,y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + ex^2 + 2fxy$$
$$+ gy^2 + hx + ky + l = 0.$$

Si l'on considère la fonction

$$D = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2),$$

laquelle est le *discriminant* de la fonction homogène

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

on pourra faire, sur la valeur numérique de cette fonction, les trois hypothèses suivantes :

1° $\qquad D < 0,$

2° $\qquad D > 0,$

3° $\qquad D = 0.$

A chacune de ces hypothèses correspond une *famille* de courbes, en sorte que nous adopterons la classification suivante :

1° $\qquad D < 0,$ *famille hyperbolique;*

2° $\qquad D > 0,$ *famille elliptique;*

3° $\qquad D = 0,$ *famille parabolique.*

Cette classification purement analytique et les dénominations que nous venons d'employer peuvent être justifiées par trois espèces de considérations géométriques. C'est ce que nous allons démontrer.

10. *Points à l'infini.* — Imaginons une droite menée par l'origine des coordonnées et passant par un point à l'infini, réel ou imaginaire, de la courbe, et désignons par μ le coefficient angulaire de cette droite.

Les valeurs de μ seront évidemment les racines de l'équation

$$d\mu^3 + 3c\mu^2 + 3b\mu + a = 0.$$

Posons

$$\mu = \mu' + \frac{c}{d},$$

et portons cette valeur dans l'équation précédente; nous aurons, réductions faites,

$$\mu'^3 + 3\left(\frac{b}{d} - \frac{c^2}{d^2}\right)\mu' + \left(2\frac{c^3}{d^3} - 3\frac{bc}{d^2} + \frac{a}{d}\right)^2 = 0.$$

Cette équation, et par conséquent l'équation en μ, admettent *des racines réelles et inégales*, ou *des racines l'une réelle et les deux autres imaginaires*, ou *des racines réelles dont deux au moins sont égales*, suivant que la fonction

$$H = 4\left(\frac{b}{d} - \frac{c^2}{d^2}\right)^3 + \left(\frac{2c^3}{d^3} + \frac{3bc}{d^2} + \frac{a}{d}\right)^2$$

est *négative*, ou *positive*, ou *nulle*.

Or, si l'on développe la fonction H et si l'on effectue les réductions qui se présentent, on trouve

$$H = \frac{1}{d^4} D,$$

et comme le facteur $\frac{1}{d^4}$ est nécessairement positif et ne peut être nul, on voit que les deux fonctions H et D sont en même temps négatives, positives ou nulles.

Par conséquent :

Si $D < 0$, la courbe présente à l'infini trois points réels et distincts auxquels correspondent trois branches infinies hyperboliques, et on a la *famille hyperbolique*.

Si $D > 0$, la courbe présente à l'infini un seul point, réel et simple, correspondant à une branche hyperbolique. Les courbes de cette famille se composent généralement d'une branche infinie et d'une courbe fermée dont la forme rappelle celle de l'ellipse; de là la dénomination de *famille elliptique*.

Si $D = 0$, la courbe aura à l'infini soit un point simple et un point double, soit un point triple. Au point multiple à l'infini correspondront généralement des branches paraboliques; de là la dénomination de *famille parabolique*.

11. *Diamètres.* — Si nous formons l'équation du diamètre conjugué de la direction dont le coefficient angulaire est m, en nous bornant aux termes du deuxième degré, nous trouverons

$$(a + mb)x^2 + 2(b + mc)xy + (c + md)y^2 + \ldots = 0.$$

La nature de la conique (ellipse, hyperbole ou parabole) représentée par cette équation dépend du signe ou de la nullité de la fonction

$$(b + mc)^2 - 4(a + mb)(c + md),$$

fonction que l'on peut écrire

$$(c^2 - bd)m^2 + (bc - ad)m + b^2 - ac = 0.$$

Les *diamètres paraboliques* correspondent aux valeurs de m qui sont racines de l'équation

$$(c^2 - bd)m^2 + (bc - ad)m + b^2 - ac = 0.$$

Or cette équation a des racines imaginaires, ou réelles et inégales, ou égales (parfois indéterminées), selon que la fonction

$$D = (bc - ad)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd)$$

est négative, ou positive, ou nulle.

D'où il résulte que le nombre des *diamètres paraboliques* est *nul* dans la *famille hyperbolique*, *égal à deux* dans la *famille elliptique*, *égal à un* ou *indéterminé* dans la *famille parabolique*.

12. *Conique centrale.* — Enfin la division en trois familles peut encore être justifiée par la considération de la courbe centrale, laquelle est une section conique.

Si l'on forme l'équation de cette courbe

$$\frac{d^2 f}{dx^2}\frac{d^2 f}{dy^2} = \left(\frac{d^2 f}{dx\,dy}\right)^2,$$

en se bornant aux termes du deuxième degré, on trouve

$$9[(ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y] + \ldots = 0,$$

et l'on voit sans peine que la conique centrale est une *ellipse* dans la *famille hyperbolique*, pour laquelle on a $D < 0$; une *hyperbole* dans la *famille elliptique*, pour laquelle on a $D > 0$; et une *parabole* dans la *famille parabolique*, pour laquelle on a $D = 0$.

13. *Résumé.* — Les considérations qui précèdent peuvent se résumer dans le tableau suivant :

DÉSIGNATION de la famille.	VALEUR de D.	NATURE des points à l'infini.	NOMBRE des diamètres paraboliques.	NATURE de la conique centrale.
Famille hyperbolique...	$D < 0$	3 points simples.	0	Ellipse.
Famille elliptique......	$D > 0$	1 seul point simple.	2	Hyperbole.
Famille parabolique.....	$D = 0$	1 point simple et 1 point double ou 1 point triple.	1 ou l'infini.	Parabole.

14. *Équation simplifiée de la famille hyperbolique.* — Considérons une courbe de la famille hyperbolique, et prenons pour axe des y l'asymptote d'une branche infinie. Le diamètre de la direction de cette droite est une hyperbole conique qui admet pour asymptotes l'axe des y et une autre droite que nous prendrons pour axe des x.

Dans ces conditions, l'équation de ce diamètre,

$$\frac{df}{dy} = 3dy^2 + 6cxy + 3bx^2 + 2gy + 2fx + k = 0,$$

doit se réduire à la forme

$$xy = \text{const.}$$

Donc

$$b = d = f = g = 0,$$

et l'équation de la courbe se réduit à

$$ax^3 + 3cxy^2 + ex^2 + hx + ky + l = 0.$$

La fonction D devient égale à $4ac^3$, et comme elle doit être négative, on voit que a et c ne peuvent pas être nuls et que leurs signes sont différents.

Par conséquent l'équation générale des courbes de la famille hyperbolique peut être ramenée à la forme simplifiée

$$(1) \qquad xy^2 + \varepsilon y = \alpha^2 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

15. *Equation simplifiée de la famille elliptique.* — Si nous considérons maintenant la famille elliptique, nous pourrons encore prendre pour axe des y l'asymptote de la branche hyperbolique et déterminer l'axe des x par les mêmes considérations que ci-dessus. Observant en outre que la fonction D est nécessairement positive, nous arriverons à la forme simplifiée

$$(2) \qquad xy^2 + \varepsilon y = -\alpha^2 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

16. *Equation simplifiée de la famille parabolique.* — Nous subdiviserons les courbes de la famille parabolique en deux classes, suivant que le point multiple à l'infini est *double* ou *triple*.

Ire Classe. — *Courbes ayant à l'infini un point simple et un point double.*

Au point simple à l'infini correspond une branche hyperbolique. Nous prendrons encore l'asymptote de cette branche pour axe des y

et nous déterminerons l'axe des x comme précédemment. La fonction D doit être nulle; d'ailleurs c ne peut pas être égal à zéro, sans quoi le point à l'infini de l'axe des y serait un point triple de la courbe. L'équation se réduit donc à la forme

$$xy^2 + \varepsilon y = \beta x^2 + \gamma x + \delta. \tag{3}$$

IIᵉ Classe. — *Courbes ayant un point triple à l'infini.*

Prenons pour axe des y une droite passant par le point à l'infini et pour axe des x une droite arbitraire.

L'équation en μ devant avoir, dans cette hypothèse, trois racines infinies, nous aurons

$$b = c = d = 0,$$

et l'équation générale des courbes de cette classe prendra la forme

$$ax^3 + ex^2 + 2fxy + gy^2 + hx + ky + l = 0.$$

Le diamètre conjugué de la direction de l'axe des y a pour équation

$$2fx + 2gy + k = 0.$$

Il se réduit à une droite qui peut être inclinée sur l'axe des y, ou parallèle à l'axe des y, ou située tout entière à l'infini. De là trois cas à examiner :

Iᵉʳ Cas. — Prenons pour axe des x la droite dont il vient d'être parlé; nous aurons

$$k = f = 0,$$

et l'équation générale des courbes correspondantes prendra la forme

$$y^2 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta. \tag{4}$$

IIᵉ Cas. — Prenons pour axe des x une droite quelconque, mais choisissons pour axe des y la droite même qui représente le diamètre de la direction du point à l'infini. Nous aurons pour équation générale des courbes comprises dans le II^e^ cas

$$xy = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta. \tag{5}$$

III^e^ Cas. — Dans le III^e^ cas, on a par hypothèse

$$f = g = 0,$$

et l'équation de la courbe se réduit à

$$ax^3 + ex^2 + hx + ky + l = 0.$$

Suivant que k est différent de zéro ou égal à zéro, on arrive à l'une ou à l'autre des deux formes

$$y = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \tag{6}$$

$$0 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta. \tag{7}$$

17. *Dénominations newtoniennes.* — Les équations simplifiées (1), (2),..., (6) auxquelles nous sommes arrivés par la considération des diamètres, sont précisément celles qui ont été données par Newton dans son *Enumeratio linearum tertii ordinis;* il en résulte que la classification qui vient d'être exposée peut s'exprimer au moyen des dénominations newtoniennes de la manière suivante :

Famille hyperbolique.	Hyperboles redondantes ..	$(xy^2 + \varepsilon y = \underline{\alpha}^2 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)$.
Famille elliptique. . .	Hyperboles défectives.....	$(xy^2 + \varepsilon y = -\underline{\alpha}^2 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)$.
Famille parabolique. .	1^re^ CLASSE.	
	Hyperboles paraboliques. .	$(xy^2 + \varepsilon y = \underline{\beta} x^2 + \gamma x + \delta)$.
	Hyperbolismes de coniques.	$(xy^2 + \varepsilon y = \gamma x + \delta)$.
	2^e^ CLASSE.	
	Paraboles divergentes.....	$y^2 = \underline{\alpha} x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.
	Tridents...............	$xy = \underline{\alpha} x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.
	Paraboles cubiques.......	$y = \underline{\alpha} x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.
	Droites parallèles........	$0 = \underline{\alpha} x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.

Le trait placé sous un coefficient indique qu'il ne peut pas être nul.

De la discussion des équations simplifiées résulte la subdivision des genres en espèces, laquelle a été donnée par Newton et complétée par Stirling. Ce dernier a compté quatre-vingt-une espèces; Newton n'en avait fait connaitre que soixante-seize, par suite de l'omission des systèmes de trois droites parallèles que représente l'équation (7).

18. *Observations relatives aux équations précédentes.* — Pour obtenir les équations générales simplifiées des hyperboles redondantes, des hyperboles défectives, des hyperboles paraboliques et des hyperbolismes de coniques, nous avons complétement déterminé les axes des coordonnées.

Mais pour obtenir les équations générales des courbes de la IIe classe de la famille parabolique, nous avons laissé une certaine indétermination dans le choix des axes. Il en résulte que ces dernières équations peuvent, sans rien perdre de leurs généralités, recevoir des simplifications nouvelles : c'est ce que nous allons développer.

Paraboles divergentes. — L'axe des y n'ayant été déterminé que de direction, nous pouvons transporter l'origine des coordonnées en un point de rencontre de l'axe des x et de la courbe. Nous aurons alors $\delta = 0$, et l'équation prendra la forme

$$y^2 = \underline{\alpha} x^3 + \beta x^2 + \gamma x.$$

Tridents. — L'axe des x étant resté arbitraire, nous pouvons disposer de sa position.

Le diamètre de la direction dont le coefficient angulaire est égal à 2β est une parabole représentée par l'équation

$$y = 3\alpha x^2 + \gamma;$$

l'axe des y rencontre ce diamètre au point dont l'ordonnée est $y = \gamma$. Plaçons l'origine en ce point de rencontre et prenons pour axe des x la tangente à la parabole, nous aurons nécessairement $\gamma = 0$, et l'équation prendra la forme

$$xy = \underline{\alpha} x^3 + \beta x^2 + \delta.$$

Parabole cubique. — La direction de l'axe des y a seule été déterminée, cet axe étant assujetti à passer par le point à l'infini.

Le diamètre de la direction dont le coefficient angulaire est m a pour équation

$$3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma - m = 0;$$

il se compose généralement de deux droites parallèles à l'axe des y et se réduit à une droite double pour la valeur particulière

$$m = \gamma - \frac{\beta^2}{3\alpha}.$$

Prenons cette droite double pour axe des y; nous aurons

$$\beta = 0,$$

et l'équation de la courbe deviendra

$$y = \alpha x^3 + \gamma x + \delta.$$

Le nouvel axe des y coupe la courbe au point dont l'ordonnée est $y = \delta$; prenons ce point pour origine des coordonnées et dirigeons l'axe des x suivant la tangente à la courbe; l'équation se réduira à la forme très-simple

$$y = \underline{\alpha} x^3.$$

Droites parallèles. — Laissant l'axe des x arbitraire, on peut évidemment disposer de la position de l'axe des y, dont la direction seule est déterminée, de manière à faire disparaître le terme en x^2. On arrive ainsi à l'équation simplifiée

$$0 = \underline{\alpha} x^3 + \beta x + \delta.$$

19. *Nouvelle forme de l'équation générale des hyperboles défectives.* — La considération de la conique centrale peut, comme celle des diamètres, conduire à des formes simplifiées pour les équations des courbes du troisième degré. Nous en donnerons un exemple pour les courbes de la famille elliptique.

Reprenons l'équation générale

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + ex^2 + 2fxy \\ + gy^2 + hx + ky + l = 0.$$

On en déduit l'équation générale de la conique centrale

$$\begin{aligned} &9\left[(ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2\right] \\ &- 3\left[(ag - 2bf + ce)x + (bg - 2cf + de)y\right] + ge - f^2 = 0. \end{aligned}$$

Lorsqu'il s'agit d'une hyperbole défective, la conique centrale est une hyperbole. Si nous prenons pour axes des coordonnées les deux asymptotes de cette courbe, l'équation précédente devra se réduire à la forme

$$xy = \text{const.},$$

et nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} ac - b^2 &= 0, \\ bd - c^2 &= 0, \\ ag - 2bf + ce &= 0, \\ bg - 2cf + de &= 0. \end{aligned}\right.$$

Une combinaison très-simple des deux premières équations donne

$$b(bc - ad) = 0.$$

Or $(bc - ad)$, coefficient de xy dans l'équation de l'hyperbole centrale, ne peut pas être nul ; donc $b = 0$ et conséquemment, d'après la seconde équation, $c = 0$.

Les deux dernières équations se réduisent alors à $ag = 0$ et $de = 0$. D'autre part le discriminant D devient égal à a^2d^2 ; donc ni a ni d ne peuvent être nuls, et par conséquent $g = 0$, $e = 0$.

Le système des quatre équations ci-dessus posées équivaut donc au système

$$b = c = g = e = 0,$$

et l'équation générale des hyperboles défectives se présente sous la forme

$$ax^3 + by^3 + 2cxy + dx + ey + f = 0,$$

très-analogue à la forme de l'équation générale des coniques.