JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 141-144.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__141_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR LA FORME
$x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande le nombre N des représentations d'un entier donné quelconque n, par la forme

$$x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Comme le facteur 3, quand il divise n, joue un rôle à part dans la solution de la question proposée, je ferai

$$n = 3^\alpha q,$$

q étant un entier pair ou impair, mais premier à 3; et je dirai d'abord que la valeur de n ne dépend pas de l'exposant α, en sorte qu'elle est la même que si l'on avait simplement $n = q$. Elle ne dépend, en effet, que de la somme des diviseurs de q, somme que nous représenterons à notre ordinaire par $\zeta_1(q)$, et l'on a

$$N = 12\zeta_1(q).$$

Ainsi, pour $n = 1$, on a les douze représentations qui répondent aux valeurs suivantes de x, y, z, t :

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t = 0,$$
$$x = 0, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad t = 0,$$

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad t=1,$$
$$x=0,\quad y=0,\quad z=1,\quad t=0,$$
$$x=-1,\quad y=0,\quad z=0,\quad t=0,$$
$$x=0,\quad y=-1,\quad z=0,\quad t=0,$$
$$x=0,\quad y=0,\quad z=-1,\quad t=0,$$
$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad t=-1,$$
$$x=1,\quad y=-1,\quad z=0,\quad t=0,$$
$$x=-1,\quad y=1,\quad z=0,\quad t=0,$$
$$x=0,\quad y=0,\quad z=1,\quad t=-1,$$
$$x=0,\quad y=0,\quad z=-1,\quad t=1;$$

et pour

$$n=3^\alpha,$$

on aurait de même

$$n=12.$$

Pour

$$n=500$$

et pour

$$n=3^\alpha.500,$$

ce qui répond toujours à

$$q=500=2^2.5^3,$$

comme

$$\zeta_1(500)=7.156=1092,$$

il viendra

$$N=12.1092,$$

partant

$$N=13104.$$

2. Nous venons de déterminer le nombre total N des solutions tant propres qu'impropres de l'équation

$$n=x^2+xy+y^2+z^2+zt+t^2.$$

Mais on pourrait aussi désirer d'avoir à part le nombre M des solutions propres, pour lesquelles aucun facteur > 1 ne divise à la fois x, y, z, t. Or il n'y a jamais de telles solutions quand n est divisible par 9, vu qu'alors tous les entiers x, y, z, t sont divisibles nécessairement par le facteur commun 3, ainsi qu'il est facile de s'en assurer. Si donc on pose, comme ci-dessus,

$$n = 3^\alpha q,$$

q étant un entier premier à 3, on aura

$$M = 0$$

toutes les fois que l'exposant α sera > 1.

Restent les valeurs $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, d'où les entiers

$$n = q, \quad n = 3q,$$

pour lesquelles la valeur de M sera la même. Voici de quelle fonction numérique de q, M dépend alors. Soient $a, b, \ldots$, les facteurs premiers de q, en sorte que

$$q = a^\mu b^\nu \ldots,$$

et posons

$$Z_1(q) = (a^\mu + a^{\mu-1})(b^\nu + b^{\nu-1})\ldots;$$

nous aurons, dans les conditions indiquées,

$$M = 12 Z_1(q).$$

On reconnaît dans la fonction

$$Z_1(q)$$

une fonction numérique déjà employée par nous, et antérieurement employée aussi par Eisenstein à l'occasion du nombre des représentations propres d'un entier impair par une somme de quatre carrés.

Ici l'entier q, qui figure dans

$$Z_1(q),$$

est premier à 3, mais indifféremment pair ou impair, et quand il est pair le facteur 2 est compris dans les facteurs a, b,..., dont il a été question plus haut. Soit, par exemple,

$$q = 500 = 2^2.5^3,$$

on aura

$$Z_4(q) = (2^2 + 2)(5^3 + 5^2) = 900;$$

et par suite le nombre M des représentations propres de chacun des deux entiers

$$500, \ 1500$$

par la forme

$$x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2$$

sera égal au produit

$$12.900,$$

c'est-à-dire égal à

$$10800.$$